Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

1. série - Oddělovací a Carathéodoryho věta

nápověda 19.10.2009, odevzdat do 26.10.2009

1. Pro $M \subseteq \mathbb{R}^d$ dokažte: Pokud $\forall x, y \in M, \lambda \in \mathbb{R} : \lambda x + (1 - \lambda)y \in M$, pak M je afinní podprostor. [2]

2. Dokažte větu o oddělování nadrovinou pro kompaktní konvexní množiny v rovině (se všemi podrobnostmi, náznak důkazu je ve skriptech):

   Nechť C a D jsou dvě disjunktní kompaktní konvexní podmnožiny roviny. Dokažte, že existuje přímka p, která je ostře odděluje, tedy že C a D leží v opačných otevřených polorovinách určených p. [2]

3. Dokažte Carathéodoryho větu (můžete použít Radonovu větu). [3]

4. Pás šířky w je uzavřená část roviny ohraničená dvěma rovnoběžnými přímkami ve vzdálenosti w. Šířka množiny $X \subseteq \mathbb{R}^2$ je nejmenší šířka pásu obsahujícího X. Dokažte, že kompaktní konvexní množina šířky 1 obsahuje úsečku jednotkové délky v každém směru. [3]

5. Mějme M konečnou množinu bodů v rovině, z nichž některé jsou červené a zbylé jsou modré. Platí, že pro každou čtveřici V bodů z M existuje přímka, která odděluje červené body z V od modrých bodů z V. Dokažte, že potom lze přímkou oddělit všechny červené body z M od všech modrých bodů z M. [3]

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`