

Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

5. série

nápověda 12.5.2009, odevzdat do 19.5.2009

Půlící přímky

1. (Lovászovo lemma v rovině) Necht' X je množina $2n$ bodů v rovině v obecné poloze a l je svislá přímka taková, že k bodů X leží nalevo od l a $2n - k$ bodů napravo, přičemž $k \leq n$. Dokažte, že l kříží přesně k půlících hran. [3]
2. (a) S využitím odhadu z prvního příkladu, tj. že počet půlících hran křížících svislou přímku je $O(n)$, dokažte, že maximální počet půlících hran n -bodové množiny v rovině je $O(n^{3/2})$. [2]
(b) Najděte n bodů a $\Omega(n^{3/2})$ hran mezi dvojicemi těchto bodů tak, aby žádná přímka neprošla více než n hran. [1]
3. Necht' X je konečná množina bodů v obecné poloze v rovině. k -díra je k -bodová konvexně nezávislá podmnožina X taková, že $\text{conv}(D) \cap X = D$. Dokažte:

(a)

$$\sum_{k=1}^{|X|} (-1)^k \cdot \#k\text{-děr} = -1$$

[2]

(b)

$$\sum_{k=1}^{|X|} (-1)^k \cdot k \cdot \#k\text{-děr} = -\#\text{bodů uvnitř conv}(X)$$

[3]

Nápověda: posouvání bodů po křivkách do vhodné konfigurace.