# Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

4. série

nápověda 5.5.2009, odevzdat do 12.5.2009

## Davenport-Schinzelovy posloupnosti

Maximální možnou délku Davenport-Schinzelovy posloupnosti řádu $s$ nad symboly $1, 2, 3, \ldots, n$ budeme značit $\lambda_s(n)$. Složitost buňky arrangementu geometrických objektů v rovině je počet vrcholů a hran ležících na hranici buňky.

1. Složitost jedné buňky arrangementu úseček
   Nechť $C$ je buňka arrangementu $n$ úseček v obecné poloze v rovině, jejichž sjednocením je souvislá množina.
   (a) Úsečky očíslujeme čísly 1 až $n$. Sepíšeme si posloupnost čísel úseček podél hranice buňky $C$, počínaje náhodným vrcholem na hranici buňky. Dokažte, že se v takto získané posloupnosti nevyskytuje podposloupnost *ababab*, a tedy složitost buňky $C$ je $O(\lambda_4(n))$. **[3]**
   (b) Najděte příklad, kde se v posloupnosti z první části příkladu vyskytuje *ababa* (a to bez ohledu na volbu počátečního vrcholu). **[1]**
   (c) Dokažte, že složitost buňky $C$ je nejvýše $O(\lambda_3(n))$. Rada: Každé úsečce přiřaďte více různých symbolů. **[3]**

2. Věta o zóně přes Davenport-Schinzelovy posloupnosti
   Zóna přímky $p$ v arrangementu přímek je množina stěn (všech dimenzí), které vidí $p$.
   (a) Dokažte, že zóna jedné přímky v arrangementu $n$ přímek v rovině má složitost $O(n)$. **[3]**

3. Nechť $g_1, g_2, \ldots, g_m$ jsou grafy $m$ spojitých po částech lineárních funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, které se dohromady skládají z $n$ úseček a polopřímek. Dokažte, že dolní obálka $g_1, g_2, \ldots, g_m$ má složitost $O(\frac{n}{m}\lambda_3(2m))$. Konkrétně pro $m = O(1)$ je složitost dolní obálky lineární. **[2]**

4. Definujme matice
$$N := \begin{pmatrix} * & 1 & * & 1 \\ 1 & * & 1 & * \end{pmatrix} \qquad L := \begin{pmatrix} 1 & * \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U := \begin{pmatrix} 1 & * & 1 \\ 1 & 1 & * \end{pmatrix}.$$
   Nechť $A \in \{0,1\}^{n\times n}$ je matice $n \times n$ složená z nul a jedniček.
   (a) Předpokládejme, že $A$ neobsahuje $N$ jako podmatici. To znamená, že neexistují indexy $i_1 < i_2$ a $j_1 < j_2 < j_3 < j_4$ takové, že $a_{i_2 j_1} = a_{i_1 j_2} = a_{i_2 j_3} = a_{i_1 j_4} = 1$. Dokažte, že $A$ pak obsahuje nejvýše $\lambda_s(n) + O(n)$ jedniček, kde $s$ je vhodná konstanta. **[1]**
   (b) Dokažte, že pokud $A$ neobsahuje $N$ jako podmatici, pak má nejvýše $\lambda_3(n) + O(n)$ jedniček. **[2]**
   (c) Dokažte, že pokud $A$ neobsahuje $L$ jako podmatici, pak má nejvýše $O(n)$ jedniček. **[1]**
   (d) Najděte matici $A$ obsahující alespoň $\Omega(n \log(n))$ jedniček, která neobsahuje $U$ jako podmatici. **[2]**