Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

3. série

nápověda 14.4.2009, termín odevzdání 21.4.2009

Shannonova kapacita sjednocení

1. Dokažte, že pro Shannonovu kapacitu disjunktního sjednocení grafů platí nerovnost $\Theta(G+H) \geq \Theta(G) + \Theta(H)$. **[4]**

Barevnost euklidovského prostoru

2. Označme $\chi(\mathbb{R}^d)$ nejmenší počet barev potřebný k obarvení všech bodů $\mathbb{R}^d$ tak, aby žádné dva body ve vzdálenosti 1 neměly stejnou barvu.

   a) Ukažte, že $\chi(\mathbb{R}^d) \geq (1+\varepsilon)^d$ pro nějaké $\varepsilon > 0$. **[1]**

   b) Ukažte, že $\chi(\mathbb{R}^d) \leq c^d$ pro nějakou konstantu c. (Může se hodit použít maximální (vzhledem k inkluzi) množinu bodů takovou, že každé dva jsou od sebe vzdálené alespoň 1/2.) **[3]**

Vektory v ohrádkách

3. Mějme jednotkové vektory $v_1, \ldots, v_n$ v $\mathbb{R}^2$ splňující $\sum_{i=1}^n v_i = 0$. Dokažte, že je lze uspořádat do posloupnosti $v_{\pi_1}, \ldots, v_{\pi_n}$ tak, aby pro každé k platilo $\| \sum_{i=1}^k v_{\pi_i} \|_2 \leq \sqrt{2}$. (Můžete se např. snažit zůstat v ohrádce o poloměru 1 a kdykoli ji musíte opustit, tak se do ní v dalším kroku hned vraťte.) **[3]**

4. Mějme $p \in [1, \infty)$ a vektory $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^d$ splňující $\|v_i\|_p \leq 1$ a $\sum_{i=1}^n v_i = 0$. Označme r_p^d nejmenší r takové, že libovolné takovéto vektory lze uspořádat do posloupnosti $v_{\pi_1}, \ldots, v_{\pi_n}$ tak, aby pro každé k platilo $\| \sum_{i=1}^k v_{\pi_i} \|_p \leq r$. Dokažte, že

   (a) $r_2^2 \geq \sqrt{5}/2$. **[2]**

   (b) $r_2^d \geq \Omega(\sqrt{d})$. **[2]**

   (c) $r_1^d \geq \Omega(d)$. **[2]**

   (d) $r_\infty^d \geq \Omega(\sqrt{d})$. **bonus [4]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`