Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

1. série

nápověda 24.3.2009, termín odevzdání 7.4.2009

Aplikace lineární algebry

1. Nechť $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je nenulový polynom. Dokažte, že $f(x)$ má nenulový násobek $h(x) = f(x)g(x)$ takový, že všechny nenulové koeficienty $h(x)$ jsou u prvočíselných mocnin x. (např. pro $f(x) = x^2 - x + 5$ je jedním možným řešením $g(x) = x^3 + x^2$). **[3]**

2. Mějme reálnou matici $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ splňující:

   - $a_{1,1} > \sum_{j=2}^n |a_{1,j}|$,
   - $a_{i,i} \geq \sum_{j;j \neq i} |a_{i,j}|$ (pro $i \geq 2$),
   - $a_{i,j} \neq 0$ (pro $1 \leq i, j \leq n$).

   Dokažte, že $\det(A) \neq 0$. **[2]**

3. (a) *Sférická 2-vzdálenostní množina v* $\mathbb{R}^d$ je 2-vzdálenostní množina tvořená body na sféře S^{d-1}. Označme maximální velikost sférické 2-vzdálenostní množiny v $\mathbb{R}^d$ jako $m_s(d)$. Dokažte:

   $$m_s(d) \leq d(d+3)/2.$$

   [3]

   (b) Mějme množiny $A_1, \ldots, A_m \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že symetrické rozdíly dvojic $(A_i, A_j), i \neq j$, nabývají pouze dvou různých velikostí. Dokažte, že $m \leq n(n+3)/2$. **[1]**

   (c) Pro množiny z části b) dokažte, že $m \leq 1 + n(n+1)/2$. **[3]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`