

Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

5. série - Mnohostěny

nápověda 1.12.2008, odevzdat do 8.12.2008

1. Uvažujme kompaktní konvexní d -rozměrný mnohostěn P . S použitím definice stěny z přednášky dokažte:
 - (a) Průnik dvou stěn P je stěna P . [2]
 - (b) Každá nejvýše $(d - 1)$ -dimenzionální stěna P je průnikem všech faset P , ve kterých je obsažena. [2]
2. Spočítejte přesný počet stěn všech dimenzí pro cyklický mnohostěn dimenze 4 a 5. [3]
3. (Zobecnění Erdősovy-Szekeresovy věty na d -rozměrné cyklické mnohostěny)
 - (a) Nechť x_1, x_2, \dots, x_n jsou body v \mathbb{R}^d . Vektory $y_i \in \mathbb{R}^{d+1}$ získáme přidáním nové složky s hodnotou 1 za poslední složku vektoru x_i . Body x_i byly zvoleny tak, že pro libovolnou volbu indexů $i_1 < i_2 < \dots < i_{d+1}$ je determinant matice se sloupci $y_{i_1}, \dots, y_{i_{d+1}}$ vždy kladný. Dokažte, že mnohostěn, který je konvexním obalem bodů x_1, \dots, x_n , je kombinatoricky ekvivalentní cyklickému mnohostěnu. [4]
 - (b) Dokažte, že pro každou dvojici přirozených čísel n, d existuje N takové, že z každých N bodů v obecné poloze v \mathbb{R}^d lze vybrat n bodů, jejichž konvexní obal je kombinatoricky ekvivalentní cyklickému mnohostěnu. [3]
4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo d existuje N takové, že pro každou N -bodovou množinu M v obecné poloze v \mathbb{R}^d lze vybrat $d + 1$ simplexů dimenze d s vrcholy v M tak, že žádná nadrovina neprotne všech $d + 1$ simplexů najednou. Použijte předchozí úlohu. [3]

Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/kvg>