

# Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

## 4. série - Dualita a mnohostěny

nápověda 24.11.2008, odevzdat do 1.12.2008

1. Ukažte, že pro libovolnou množinu  $X \subset \mathbb{R}^d$  je  $(X^*)^*$  rovno uzávěru  $\text{conv}(X \cup \{0\})$ . [2]
2. Ukažte, že  $C = C^*$  právě tehdy, když  $C$  je uzavřená jednotková koule se středem v počátku. [2]
3. Uvažme  $n$  úseček v rovině takových, že jejich prodloužení prochází počátkem, ale žádná z těchto úseček počátek neobsahuje. Ukažte, že když každé 3 z nich lze protnout přímkou, pak všech  $n$  úseček lze protnout jednou přímkou. [3]
4. Bod  $x$  v konvexní množině  $C \subseteq \mathbb{R}^2$  nazveme *extremální*, pokud  $x \notin \text{conv}(C \setminus \{x\})$ , a *exponovaný*, pokud existuje přímka  $p$  taková, že  $p \cap C = \{x\}$  a  $C$  leží celá v jedné z polorovin určených přímkou  $p$ . Najděte v rovině příklad konvexní množiny  $C$  s bodem  $x \in C$ , který je extremální, ale ne exponovaný. [3]
5. Dokažte, že každý polytop  $P \subset \mathbb{R}^d$  je kolmou projekcí nějakého  $k$ -rozměrného pravidelného simplexu v  $\mathbb{R}^n$ , pro vhodná  $k, n$ . (Kolmou projekcí rozumíme zobrazení  $\pi$  z prostoru  $\mathbb{R}^n$  na podprostor  $M \cong \mathbb{R}^d$  vnořený v  $\mathbb{R}^n$  takové, že pro každé  $x \in \mathbb{R}^n$  je vektor  $\pi(x) - x$  kolmý na  $M$ .) [4]