

# Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

## 3. série - Počítání incidencí

nápověda 10.11.2008, odevzdat do 24.11.2008

1. Nechť  $I_{1circ}(n, m)$  označuje maximální počet incidencí mezi  $n$  body a  $m$  jednotkovými kružnicemi v rovině. Ukažte, že  $I_{1circ}(n, n) = O(n^{4/3})$ . [3]
2. Najděte co nejlepší horní a dolní odhad na počet incidencí  $n$  bodů a  $m$  přímk v  $\mathbb{R}^3$ . [2]
3. Najděte  $n$ -bodovou množinu v  $\mathbb{R}^4$  s  $\Omega(n^2)$  jednotkovými vzdálenostmi. [4]
4. Nechť  $P$  je  $n$ -bodová množina v rovině.
  - (a) Ukažte, že maximální možný počet přímk takových, že každá z nich obsahuje alespoň  $k > 1$  bodů  $P$ , je  $O(n^2/k^3 + n/k)$  a že maximální počet incidencí těchto přímk s množinou  $P$  je  $O(n^2/k^2 + n)$ . [3]
  - (b) Je dáno  $\alpha \in (0, \pi)$ . Ukažte, že  $P$  určuje nejvýše  $O(n^{7/3})$  trojúhelníků s alespoň jedním úhlem o velikosti  $\alpha$ . (Nápověda: rozdělte trojúhelníky  $ABC$  s úhlem  $\alpha$  při vrcholu  $A$  na 2 skupiny podle toho, zda přímka  $AC$  obsahuje více než  $n^{1/3}$  bodů z  $P$ .) [3]
  - (c) Ukažte, že  $P$  určuje nejvýše  $O(n^{7/3})$  trojúhelníků s jednotkovým obsahem. [2]