

# Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

## 2. série - Věty Hellyho typu

nápověda 27.10.2008, odevzdat do 3.11.2008

1. Nechť  $C_1, \dots, C_n$  je soubor (alespoň tří) konvexních množin v rovině a nechť  $K$  je kompaktní podmnožina roviny. Ukažte, že pokud průnik každé trojice množin z  $C_1, \dots, C_n$  obsahuje posunutou kopii  $K$ , potom také průnik všech  $C_1, \dots, C_n$  obsahuje posunutou kopii  $K$ . [2]
2. (a) Mějme soubor konvexních množin v rovině  $C_1, \dots, C_n$ ,  $n \geq 4$ . Ukažte, že pokud průnik každé čtveřice z  $C_1, \dots, C_n$  obsahuje polopřímku, potom také průnik všech  $C_1, \dots, C_n$  obsahuje polopřímku. [4]  
(b) Najděte 6 navzájem různých konvexních množin v rovině  $C_1, \dots, C_6$  takových, že průnik každé trojice z  $C_1, \dots, C_6$  obsahuje polopřímku, ale průnik všech  $C_1, \dots, C_6$  polopřímku neobsahuje. [2]
3. Nechť  $M \subset \mathbb{R}^2$  je kompaktní (ne nutně souvislá) množina o ploše  $S(M) > 0$ . Dokažte, že existuje bod  $x \in \mathbb{R}^2$  takový, že libovolná přímka jím procházející dělí množinu  $M$  na dvě části o ploše alespoň  $S(M)/3$ . (Můžete předpokládat, že  $M$  je sjednocením konečně mnoha mnohoúhelníků). [3]
4. Řekneme, že soubor  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$  konvexních množin v rovině má  $(p, q)$ -vlastnost, pokud  $n \geq p$  a z každé  $p$ -tice z  $\mathcal{C}$  lze vybrat  $q$  množin s neprázdným průnikem. Špendlíkovost  $s(\mathcal{C})$  souboru množin  $\mathcal{C}$  je velikost nejmenší množiny bodů  $X$  takové, že každé  $C_i \in \mathcal{C}$  obsahuje alespoň 1 bod z  $X$ .
  - (a) Dokažte, že je-li  $\mathcal{C}$  konečný soubor osových obdélníků (tj. uzavřených obdélníků s hranami rovnoběžnými s osami) s  $(2, 2)$ -vlastností, pak  $s(\mathcal{C}) = 1$ . [1]
  - (b) Dokažte, že je-li  $\mathcal{C}$  konečný soubor osových obdélníků se  $(4, 3)$ -vlastností, pak  $s(\mathcal{C}) \leq 2$ . [3]
  - (c) Najděte soubor  $\mathcal{C}$  několika osových obdélníků s  $(3, 2)$ -vlastností, pro který  $s(\mathcal{C}) = 3$ . [2]

---

Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/kvg>