Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

6. série

nápověda 3.1.2008, odevzdat do 9.1.2008

Arrangementy

1. Spočtěte počet stěn dimenzí 1 a 2 arrangementu n rovin v obecné poloze v $\mathbb{R}^3$. [2]

2. Dokažte, že počet *neomezených* buněk v arrangementu n nadrovin v $\mathbb{R}^d$ je $O(n^{d-1})$, pro d pevné. [2]

3. Mějme jednoduchý arrangement n přímek v rovině v obecné poloze. Vrchol v je extrémem, pokud směrnice přímek, na kterých v leží, mají různá znaménka. Dokažte, že počet extrémů na hladinách 0 až k je nejvýše $O((k+1)^2)$. Můžete postupovat podobně jako v důkazu věty o hladinách. **bonus [2]**

4. Nechť $P = \{p_1, p_2 \dots p_n\}$ je množina bodů v rovině. Řekneme, že body x a y mají *stejný výhled* na P, jestliže jsou z nich body P vidět ve stejném cyklickém pořadí (tj. jestliže otáčíme polopřímkou s počátkem v bodě x resp. y po směru hodinových ručiček, tato přímka nachází body P ve stejném pořadí). Předpokládejme, že ani jeden z bodů x a y nepatří do P a neprochází jimi žádná přímka určená dvěma body z P.

   (a) Ukažte, že maximální počet různých "výhledů" je $O(n^4)$. [2]

   (b) Ukažte, že odhad v předchozím bodě nelze obecně zlepšit. [5]

5. (Průnikové grafy) Nechť S je množina n geometrických útvarů v rovině. Průnikový graf S je graf na n vrcholech, které odpovídají útvarům. Dva vrcholy jsou spojené hranou právě tehdy, když jim odpovídající útvary mají neprázdný průnik.

   (a) Dokažte, že většina grafů není průnikovým grafem úseček v rovině. Všech grafů na n vrcholech je $2^{\binom{n}{2}} = 2^{n^2/2+O(n)}$. Průnikových grafů n úseček je jenom $2^{O(n \log n)}$ (pozor na kolineární úsečky!). Použijte větu o počtu znaménkových kombinací. **bonus [3]**

   (b) Dokažte, že průnikových grafů n křivek v rovině je alespoň $2^{\Omega(n^2)}$. Pokud chcete, můžete místo pro n křivek řešit úlohu pro n konvexních množin. [3]

Konvexně nezávislé množiny

6. Dokažte, že pro každé k exituje $n(k)$ takové, že každá množina $n(k)$ bodů v rovině obsahuje k-bodovou konvexně nezávislou podmnožinu nebo k bodů ležících na na přímce. [2]

7. Dokažte, že každá dostatečně velká množina bodů v $\mathbb{R}^3$ v obecné poloze obsahuje 7-díru. Můžete bez důkazu použít Erdősovu-Szekeresovu větu pro $\mathbb{R}^3$. [3]

8. Dokažte, že množina $\{(i,j); i = 1,2,\dots,n;\ j = 1,2,\dots,n\}$ neobsahuje konvexně nezávislou podmnožinu s více než $Cn^{2/3}$ body, kde C je vhodná konstanta. [4]

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`