# Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

## 5. série - Mnohostěny

nápověda 12.12.2007, odevzdat do 19.12.2007

1. Uvažujme kompaktní konvexní $d$-rozměrný mnohostěn $P$. S použitím definice stěny z přednášky dokažte:

   (a) Průnik dvou stěn $P$ je stěna $P$. [2]

   (b) Každá nejvýše $(d-1)$-dimenzionální stěna $P$ je průnikem všech faset $P$, ve kterých je obsažena. [2]

2. Spočítejte přesný počet stěn všech dimenzí pro cyklický mnohostěn dimenze 4 a 5. [3]

3. (Zobecnění Erdősovy-Szekeresovy věty na $d$-rozměrné cyklické mnohostěny)

   (a) Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou body v $\mathbb{R}^d$. Vektory $y_i \in \mathbb{R}^{d+1}$ získáme přidáním nové složky s hodnotou 1 za poslední složku vektoru $x_i$. Body $x_i$ byly zvoleny tak, že pro libovolnou volbu indexů $i_1 < i_2 < \cdots < i_{d+1}$ je determinant matice se sloupci $y_{i_1}, \ldots, y_{i_{d+1}}$ vždy kladný. Dokažte, že mnohostěn, který je konvexním obalem bodů $x_1, \ldots, x_n$, je kombinatoricky ekvivalentní cyklickému mnohostěnu. [4]

   (b) Dokažte, že pro každou dvojici přirozených čísel $n, d$ existuje $N$ takové, že z každých $N$ bodů v obecné poloze v $\mathbb{R}^d$ lze vybrat $n$ bodů, jejichž konvexní obal je kombinatoricky ekvivalentní cyklickému mnohostěnu. [3]

4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $d$ existuje $N$ takové, že pro každou $N$-bodovou množinu $M$ v obecné poloze v $\mathbb{R}^d$ lze vybrat $d+1$ simplexů dimenze $d$ s vrcholy v $M$ tak, že žádná nadrovina neprotne všech $d+1$ simplexů najednou. Použijte předchozí úlohu. [3]

---

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`