Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

3. série - Počítání incidencí

nápověda 21.11.2007, odevzdat do 28.11.2007

1. Nechť $I_{1circ}(n,m)$ označuje maximální počet incidencí mezi n body a m jednotkovými kružnicemi v rovině. Ukažte, že $I_{1circ}(n,n) = O(n^{4/3})$. [3]

2. Najděte co nejlepší horní a dolní odhad na počet incidencí n bodů a m přímek v $\mathbb{R}^3$. [2]

3. Najděte n-bodovou množinu v $\mathbb{R}^4$ s $\Omega(n^2)$ jednotkovými vzdálenostmi. [4]

4. Nechť P je n-bodová množina v rovině.

   (a) Ukažte, že maximální možný počet přímek takových, že každá z nich obsahuje alespoň $k > 1$ bodů P, je $O(n^2/k^3 + n/k)$ a že maximální počet incidencí těchto přímek s množinou P je $O(n^2/k^2 + n)$. [3]

   (b) Je dáno $\alpha \in (0, \pi)$. Ukažte, že P určuje nejvýše $O(n^{7/3})$ trojúhelníků s alespoň jedním úhlem o velikosti α. (Nápověda: rozdělte trojúhelníky ABC s úhlem α při vrcholu A na 2 skupiny podle toho, zda přímka AC obsahuje více než $n^{1/3}$ bodů z P.) [3]

   (c) Ukažte, že P určuje nejvýše $O(n^{7/3})$ trojúhelníků s jednotkovým obsahem. [2]

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`