Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

2. série - Věty Hellyho typu

nápověda 31.10.2007, odevzdat do 7.11.2007

1. Nechť $C_1, \ldots, C_n$ je soubor (alespoň tří) konvexních množin v rovině a nechť K je kompaktní podmnožina roviny. Ukažte, že pokud průnik každé trojice množin z $C_1, \ldots, C_n$ obsahuje posunutou kopii K, potom také průnik všech $C_1, \ldots, C_n$ obsahuje posunutou kopii K. [2]

2. (a) Mějme soubor konvexních množin v rovině $C_1, \ldots, C_n$, $n \geq 4$. Ukažte, že pokud průnik každé čtveřice z $C_1, \ldots, C_n$ obsahuje polopřímku, potom také průnik všech $C_1, \ldots, C_n$ obsahuje polopřímku. [4]

   (b) Najděte 6 navzájem různých konvexních množin v rovině $C_1, \ldots, C_6$ takových, že průnik každé trojice z $C_1, \ldots, C_6$ obsahuje polopřímku, ale průnik všech $C_1, \ldots, C_6$ polopřímku neobsahuje. [2]

3. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je kompaktní (ne nutně souvislá) množina o ploše $S(M) > 0$. Dokažte, že existuje bod $x \in \mathbb{R}^2$ takový, že libovolná přímka jím procházející dělí množinu M na dvě části o ploše alespoň $S(M)/3$. (Můžete předpokládat, že M je sjednocením konečně mnoha mnohoúhelníků). [3]

4. Řekneme, že soubor $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ konvexních množin v rovině má (p, q)-vlastnost, pokud $n \geq p$ a z každé p-tice z $\mathcal{C}$ lze vybrat q množin s neprázdným průnikem. Špendlíkovost $s(\mathcal{C})$ souboru množin $\mathcal{C}$ je velikost nejmenší množiny bodů X takové, že každé $C_i \in \mathcal{C}$ obsahuje alespoň 1 bod z X.

   (a) Dokažte, že je-li $\mathcal{C}$ konečný soubor osových obdélníků (tj. uzavřených obdélníků s hranami rovnoběžnými s osami) s $(2, 2)$-vlastností, pak $s(\mathcal{C}) = 1$. [1]

   (b) Dokažte, že je-li $\mathcal{C}$ konečný soubor osových obdélníků se $(4, 3)$-vlastností, pak $s(\mathcal{C}) \leq 2$. [3]

   (c) Najděte soubor $\mathcal{C}$ několika osových obdélníků s $(3, 2)$-vlastností, pro který $s(\mathcal{C}) = 3$. [2]

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`