Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

3. série - Hranová expanze, normální rozdělení

nápověda 4.4.2007, odevzdat do 11.4.2007

1. Nechť G je r-regulární graf, μ_2 druhé nejmenší vlastní číslo jeho Laplaceovy matice L a $\Phi(G)$ hranová expanze G. Dokažte, že
$$\Phi(G) \geq \frac{\mu_2}{2}.$$
(Použijte tvrzení z přednášky na vhodný vektor s nulovým součtem souřadnic.) [2]

2. Důkaz horního odhadu na expanzi pomocí μ_2.

   Nechť g je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu μ_2. Označme $f = g^+$, tedy vektor, jehož v-tá souřadnice je $f_v = \max(0, g_v)$.

   (a) Dokažte, že $fLf^T \leq \mu_2 \|f\|^2$. (Nejdříve ukažte, že pro každé v je $Lf_v^T \leq \mu_2 g_v$.) [2]

   (b) Označme
$$B_f = \sum_{\{u,v\} \in E(G)} |f_u^2 - f_v^2|.$$
   S využitím Cauchy-Schwarzovy nerovnosti ukažte, že
$$B_f \leq \sqrt{2r} \cdot \|f\| \cdot \sqrt{\sum_E (f_u - f_v)^2}$$
   . [2]

   (c) Dokažte, že $B_f \geq \Phi(G) \cdot \|f\|^2$. (Uspořádejte vrcholy grafu podle hodnoty f_v a uvažujte hranové expanze indukovaných řezů.) [3]

   (d) Z předchozích nerovností odvoďte, že $\Phi(G) \leq \sqrt{2r\mu_2}$. [1]

3. Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením, $X \sim N(0, \sigma)$, $Y \sim N(0, \rho)$. Dokažte, že $X + Y \sim N(0, \sqrt{\sigma^2 + \rho^2})$. (Připomeňme, že pro hustotu h součtu dvou nezávislých náhodných veličin s hustotami f, g platí $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy$) [2]

4. Dokažte, že pro každé $u \in [0, 1/4]$ platí
$$e^{-u}\sqrt{\frac{1}{1-2u}} \leq e^{2u^2}.$$
[3]