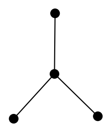
Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

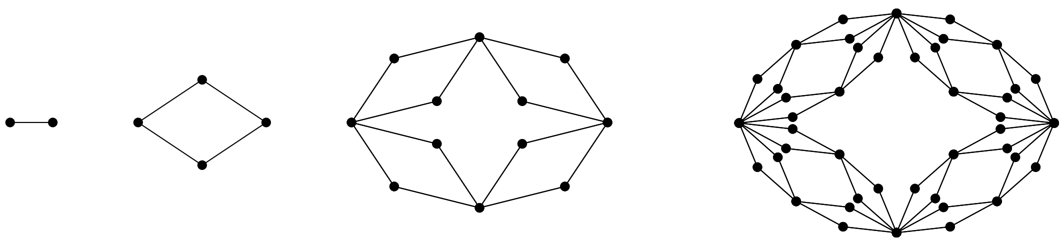
2. série - Dolní odhady na distorzi

nápověda 21.3.2007, odevzdat do 28.3.2007

1. Ukažte, že pro vnoření hvězdy na čtyřech vrcholech (viz obr. 1) do euklidovského prostoru je potřeba distorze alespoň $2/\sqrt{3}$. [2]



2. Mějme následující “diamantové grafy” $G_0, G_1, \ldots$:



G_0 G_1 G_2 G_3

G_0 jsou dva vrcholy spojené hranou a G_{i+1} dostaneme z G_i nahrazením každé hrany čtyřcyklem se dvěma novými vrcholy. Dokažte, že vnoření G_m do euklidovského prostoru vyžaduje distorzi alespoň $\sqrt{m+1}$. [3]

Nápověda: Označme $G_i = (V_i, E_i)$, kde $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m$. Pro každou hranu $e \in E_{i-1}$ nechť $\{u_e, v_e\}$ je dvojice nových vrcholů ze čtyřcyklu v G_i, kterým byla nahrazena hrana e. Nechť F_i je množina hran $\big\{\{u_e, v_e\} : e \in E_{i-1}\big\}$. Na množiny $E = E_m$ a $F = E_0 \cup \bigcup_{i=1}^{m} F_i$ použijte obdobu důkazu na dolní odhad distorze euklidovského vnoření Hammingovy krychle.

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`

3a. Nechť $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou body v euklidovském prostoru (dívejme se na ně jako na obrazy vrcholů od vnoření cesty délky n). Označme

$$\Gamma = \left\{(a, a + 2^k, a + 2^{k+1}) : a = 0, 1, \ldots, a + 2^{k+1} \le n, k = 0, 1, 2, \ldots\right\}.$$

Ukažte, že

$$\sum_{(a,b,c)\in\Gamma} \frac{\|x_a - 2x_b + x_c\|^2}{(c-a)^2} \le \sum_{i=0}^{n-1} \|x_i - x_{i+1}\|^2$$

(což ukazuje, že průměrná trojice (a, b, c) je "rovná"). [3]

Nápověda: Dokažte následující rovnoběžníkové pravidlo

$$\frac{\|(x_a - x_b) - (x_b - x_c)\|^2 + \|(x_a - x_b) + (x_b - x_c)\|^2}{(c-a)^2} = 2\frac{\|x_a - x_b\|^2 + \|x_b - x_c\|^2}{(c-a)^2}$$

a tyto rovnosti posčítejte přes všechny $(x_a, x_b, x_c) \in \Gamma$.

3b. Ukažte, že vnoření úplného binárního stromu T_m o m hladinách do ℓ_2 vyžaduje distorzi $\Omega(\sqrt{\log m})$. Uvažujte vnoření $f : V(T_m) \to \ell_2$ a sečtěte nerovnosti z části (a) přes všechny obrazy cest z kořene do listu. [5]

4. Ukažte, že pro každý konečný simpliciální komplex dimenze k existuje jeho prosté a spojité vnoření do $\mathbb{R}^{2k+1}$. [3]