Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

1. série

nápověda 7.3.2007, odevzdat do 14.3.2007

1. Ukažte, že pro každé $d \geq 1$ existuje izometrie $f : \ell_1^d \to \ell_\infty^{2^d}$. ($\ell_p^d$ je jen jiné označení pro $(\mathbb{R}^d, \|.\|_p)$.) [2]

2. Chceme najít algoritmus řešící následující problém: pro danou konečnou množinu $X \subseteq \ell_1^d$, $|X| = n$, spočítejte její průměr $\mathrm{diam}(X) := \max_{x,y \in X} \|x - y\|_1$. S pomocí 1. úlohy navrhněte algoritmus běžící v čase $O(d2^d n)$. (Porovnejte s "naivním" algoritmem, který spočítá vzájemné vzdálenosti všech dvojic bodů). [2]

3. Uvažujme n-bodovou množinu V a označme $N = \binom{n}{2}$. Každou pseudometriku na množině V můžeme přirozeně reprezentovat jako bod v $\mathbb{R}^N$.

   (a) Ukažte, že množina všech pseudometrik na V (tzv. metrický kužel) je konvexní podmnožinou $\mathbb{R}^N$. [1]

   Dále definujeme $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^N$ jako množinu všech pseudometrik na V indukovaných vnořeními $f : V \to \ell_1^k$, $k = 1, 2, \ldots$, tj.

   $$\mathcal{L} = \left\{ (\|f(u) - f(v)\|_1)_{(u,v) \in \binom{V}{2}} : f : V \to \ell_1^k, k = 1, 2, \ldots \right\}.$$

   (b) Ukažte, že $\mathcal{L}$ je konvexním obalem všech *přímkových pseudometrik*, tzn. pseudometrik indukovaných zobrazeními $f : V \to \ell_1^1$. [2]

   (c) Dokažte, že každou metriku z $\mathcal{L}$ lze izometricky vnořit do ℓ_1^N. Jinými slovy, každá n-bodová množina v nějakém ℓ_1^k je realizovatelná v ℓ_1^N. (Existují příklady, kde dimenze $\Omega(n^2)$ je potřeba, na rozdíl od Euklidovských metrik, kde vždy stačí dimenze $n - 1$). [4]

4. Ukažte, že každá přímková pseudometrika ν na n-bodové množině V je nezápornou lineární kombinací nejvýše $n - 1$ *řezových pseudometrik*: $\nu = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \tau_i$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \geq 0$. Řezová pseudometrika τ_i je přímková pseudometrika indukovaná zobrazením $f : V \to \{0, 1\}$. (Podle úlohy 3(b) pak platí, že každá konečná ℓ_1-metrika je nezápornou lineární kombinací řezových pseudometrik.) [2]

5. Pro dané $\varepsilon > 0$ najděte pomocí objemového argumentu co nejlepší dolní odhad na dimenzi prostoru $\mathbb{R}^d$, do kterého lze vnořit J_n (n-bodový prostor, kde jsou všechny vzdálenosti rovny 1) s distorzí nejvýše $1 + \varepsilon$. [2]