Příklady z Kombinatorické a Výpočetní Geometrie

2. serie

nápověda 25.10.2006, odevzdat do 1.11.2006

1. Dokažte Carathéodoryho větu (můžete použít Radonovu větu). [3]

2. Nechť $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní.

   (a) $x_0, \ldots, x_n$ jsou afinně nezávislé.

   (b) $x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0$ jsou lineárně nezávislé.

   (c) $\dim \operatorname{span}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} = n$.

   (d) $\binom{x_0}{1}, \binom{x_1}{1}, \ldots, \binom{x_n}{1} \in \mathbb{R}^{d+1}$ jsou lineárně nezávislé.

   (e) $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.
   Pokud $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ a $\lambda_0 + \cdots + \lambda_n = 0$, potom $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$.

   [5]

3. Pro $M \subseteq \mathbb{R}^d$ dokažte: Pokud $\forall x, y \in M, \lambda \in \mathbb{R} : \lambda x + (1 - \lambda) y \in M$, pak M je afinní podprostor. [2]

4. (triangulace mnohoúhelníka) *Mnohoúhelník* je uzavřená cesta v rovině složená z rovných úseček. Mnohoúhleník je *jednoduchý*, pokud jeho hranice sama sebe neprotíná. Například pentagram není jednoduchý pětiúhelník, naprotí tomu konvexní pětiúhelník jednoduchý je. *Diagonála* je úsečka spojující dva vrcholy. *Triangulace* mnohoúhelníka je rozklad mnohoúhleníka na trojúhleníky pomocí diagonál, které nic nekříží. Dokažte, že každý jednoduchý (ne nutně konvexní) mnohoúhelník v rovině lze triangulovat. Z kolika trojúhelníků se bude triangulace skládat? [2]

5. Mřížka $\mathbb{Z}^2$ jsou body v rovině s celočíselnými souřadnicemi. Nechť $M \subset \mathbb{Z}^2$ je jednoduchý mřížový mnohoúhleník (jeho vrcholy leží v mřížových bodech). Dokažte, že jeho obsah je roven počtu mřížových bodů uvnitř plus polovina počtu mřížových bodů na hranici mínus jedna:

$$\operatorname{vol} M = |M \cap \mathbb{Z}^2| + 1/2 |\partial M \cap \mathbb{Z}^2| - 1$$

   [2]

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`