Příklady z Kombinatorické a Výpočetní Geometrie

1. serie

nápověda 25.10.2006, odevzdat do 1.11.2006

1. Pás šířky w je uzavřená část roviny ohraničená dvěma rovnoběžnými přímkami ve vzdálenosti w. Šířka množiny $X \subseteq \mathbb{R}^2$ je nejmenší šířka pásu obsahujícího X. Dokažte, že platí:

   (a) Kompaktní konvexní množina šířky 1 obsahuje úsečku jednotkové délky v každém směru. [3]

   (b) Nechť každá trojice ze souboru $C_1, C_2, \ldots, C_n$ uzavřených konvexních množin má průnik šířky alespoň 1, pak průnik všech má šířku alespoň 1. [2]

2. Konečná množina bodů A v $\mathbb{R}^d$ je v obecné poloze, pokud každých $d+1$ bodů je afinně nezávislých. V situaci jako v Radonově větě (A je $d+2$ bodová množina v $\mathbb{R}^d$) nazvěme bod $x \in \mathbb{R}^d$ Radonovým bodem, pokud leží v průniku konvexních obalů dvou disjunktních podmnožin množiny A. Dokažte, že pokud A je v obecné poloze, pak existuje právě jeden Radonův bod. [3]

3. Mějme soubor konvexních množin v rovině $C_1, \ldots, C_n$. Ukažte, že pokud průnik každé čtveřice z $C_1, \ldots, C_n$ obsahuje polopřímku, potom také průnik všech $C_1, \ldots, C_n$ obsahuje polopřímku. [4]

Nebodované příklady - na rozmyšlenou do tramvaje:

1. Jak mohou vypadat průniky dvou (2-dimenzionálních) rovin v $\mathbb{R}^4$? Jak vypadá typický případ? Jak to vyjde s nadrovinami v $\mathbb{R}^4$?

2. Objekty v $\mathbb{R}^4$ si můžeme představovat jako třídimenzionální objekty v $\mathbb{R}^3$ pohybující se v čase (čas zde zastupuje čtvrtý rozměr). Pokuste se si takto představit průniky dvou rovin v $\mathbb{R}^4$, jak bylo zadáno v předchozím příkladě.

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`