

Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

7. serie - Arrangementy

nápověda 5.1.2006, odevzdat do 12.1.2006

1. Spočítejte počet stěn dimenzí 1 a 2 arrangementu n rovin v obecné poloze v \mathbf{R}^3 . [2]
2. Dokažte, že počet *neomezených* buněk v arrangementu n nadrovin v \mathbf{R}^d je $O(n^{d-1})$, pro d pevné. [2]
3. Kolik je d -dimenzionálních buněk v arrangementu $\binom{d}{2}$ nadrovin v \mathbf{R}^d , které odpovídají rovnicím $\{x_i = x_j\}$, kde $1 \leq i < j \leq d$? [3]
4. Nechtě $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ je množina bodů v rovině. Řekneme, že body x a y mají *stejný výhled* na P , jestliže jsou z nich body P vidět ve stejném cyklickém pořadí (tj. jestliže otáčíme polopřímku s počátkem v bodu x resp. y po směru hodinových ručiček, tato přímka nachází body P ve stejném pořadí). Předpokládejme, že ani jeden z bodů x a y nepatří do P a neprochází jimi žádná přímka určená dvěma body z P .
 - (a) Ukažte, že maximální počet různých "výhledů" je $O(n^4)$. [2]
 - (b) Ukažte, že odhad v předchozím bodě nelze obecně zlepšit. [5]
5. (Průnikové grafy) Nechtě S je množina n úseček v rovině. Průnikový graf S je graf na n vrcholech, které odpovídají úsečkám a dva vrcholy jsou spojené hranou právě tehdy, když jim odpovídající úsečky mají neprázdný průnik.
 - (a) Dokažte, že graf získaný z K_5 podrozdělením každé hrany právě jednou není průnikový graf úseček. (Dokonce to není ani průnikový graf souvislých křivek v rovině). [4]
 - (b) Dokažte, že většina grafů není průnikovým grafem úseček. Všech grafů na n vrcholech je $2^{\binom{n}{2}} = 2^{n^2/2 + O(n)}$. Průnikových grafů úseček je jenom $2^{O(n \log n)}$ (pozor na kolineární úsečky!). Použijte větu o počtu znaménkových kombinací. [3]