Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

3. serie - Minkowského věta a aplikace

nápověda 3.11.2005, odevzdat do 10.11.2005

1. Dokažte: Pokud $C \subseteq \mathbf{R}^d$ je konvexní, symetrická okolo počátku, omezená taková, že $\mathrm{vol}(C) > k2^d$, potom C obsahuje aspoň $2k$ mřížových bodů. **[3]**
2. Ukažte, že pro iracionální číslo α existuje nekonečně mnoho párů čísel m, n takových, že $|\alpha - m/n| < 1/n^2$. **[1]**
3. Dokažte, že pro $\alpha = \sqrt{2}$ existuje jen konečně mnoho dvojic m, n splňujících $|\alpha - m/n| < 1/4n^2$. **[4]**
4. Nechť $M \subset \mathbf{Z}^2$ je mřížový mnohoúhleník (jeho vrcholy leží v mřížových bodech). Dokažte, že jeho objem je roven počtu mřížových bodu uvnitř plus polovina počtu mřížových bodů na hranici mínus jedna:

$$\mathrm{vol}\, M = |M \cap \mathbf{Z}^2| + 1/2|\partial M \cap \mathbf{Z}^2| - 1$$

[2]

4. serie - Dualita

nápověda 10.11.2005, odevzdat do 24.11.2005

1. Nechť $C = \{x \in \mathbf{R}^d : |x_1| + \cdots + |x_d| \leq 1\}$. Ukažte, že C^* je krychle $\{x \in \mathbf{R}^d : \max |x_i| \leq 1\}$. Nakreslete obě tělesa pro $d = 3$. **[2]**
2. Ukažte, že pro libovolnou množinu $X \subset \mathbf{R}^d$ je $(X^*)^*$ rovno uzávěru $\mathrm{conv}(X \cup \{0\})$, kde X^* označuje duální množinu k X. **[2]**
3. Ukažte, že $C = C^*$ právě tehdy, když C je uzavřená jednotková koule se středem v počátku. **[2]**
4. Uvažme n úseček v rovině takových, že jejich prodloužení prochází počátkem, ale žádná z těchto úseček počátek neobsahuje. Ukažte, že když každé 3 z nich lze protnout přímkou, pak všech n úseček lze protnout jednou přímkou. **[3]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`