Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

4. série - Geometrická diskrepance a lineární algebra

nápověda 18.5.2005, odevzdat do 25.5.2005

1. Van der Corputova množina je množina $\{(\frac{i}{n}, r(i)) : i = 0, 1, \ldots, n-1\}$, kde hodnota $r(i)$ je určena obraceným pořadím cifer binárního zápisu čísla i: pro $i = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \ldots$, kde $a_j \in \{0, 1\}$, položme

$$r(i) = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2^2} + \frac{a_2}{2^3} + \frac{a_3}{2^4} + \ldots.$$

   Ukažte, že Van der Corputova množina s 2^d body je projekcí množiny vrcholů d-dimenzionální krychle a uveďte tuto projekci explicitně v souřadnicích. **[2]**

2. Ukažte, že n bodová Van der Corputova množina P má „velkou" diskrepanci vůči systému libovolně natočených obdélníků, konkrétně existuje (natočený) obdélník $R \subset [0,1]^2$ s obsahem $\Omega(n^{-1/2})$ neobsahující žádný bod P. **[4]**

3. Nechť R je osový obdélník $[0,a) \times [0,b)$ a $\mathcal{T}$ je systém tvořený všemi posunutími R, které jsou celé obsaženy v $[0,1]^2$. Ukažte, že $\mathrm{D}(n, \mathcal{T}) = O(1)$ (pro pevné R). **[4]**

4. Dokažte, že pro libovolné matice A a B stejného typu platí $\mathrm{rank}(A+B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$. **[1]**

5. Dokažte, že matice M typu $n \times n$ má hodnost nejvýš r, právě když existují matice U a V, kde U je typu $n \times r$ a V je typu $r \times n$, takové, že $M = UV$. **[2]**

6. Buď P konvexní obal bodů $v_1, \ldots, v_{2^d}$ v $\mathbf{R}^d$, a předpokládejme, že P je sjednocením 2^d množin tvaru $\frac{1}{2}(P + v_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 2^d$. Potom P je nutně rovnoběžnostěn s vrcholy $v_1, \ldots, v_{2^d}$. **[4]**