Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

3. série

nápověda 20.4.2005, odevzdat do 28.4.2005

Davenport-Schinzelovy posloupnosti

Maximální možnou délku Davenport-Schinzelovy posloupnosti řádu s nad symboly $1, 2, 3, \ldots, n$ budeme značit $\lambda_s(n)$. Složitost buňky arrangementu geometrických objektů v rovině je počet vrcholů a hran ležících na hranici buňky.

1. Dokažte, že $\lambda_2(n) = 2n - 1$ (zakázaná podposloupnost je $abab$). **[2]**

2. (složitost jedné buňky arrangementu úseček). Nechť C je buňka arrangementu n úseček v obecné poloze v rovině.

   (a) Úsečky očíslujeme čísly 1 až n. Sepíšeme si posloupnost čísel úseček podél hranice buňky C, počínaje náhodným vrcholem na hranici buňky (co když hranice bude mít více komponent souvislousti?). Dokažte, že se v takto získané poslousloupnosti nevyskytuje podposloupnost $ababab$ a tedy že složitost buňky C je $O(\lambda_4(n))$. **[3]**

   (b) Najděte příklad, kde se v posloupnosti z první části příkladu vyskytuje $ababa$ (a to bez ohledu na volbu počátečního vrcholu). **[1]**

   (c) Dokažte, že složitost buňky C je nejvýše $O(\lambda_3(n))$. Rada: Každé straně úsečky přiřaďte jiný symbol. **[3]**

3. (věta o zóně přes Davenport-Schinzelovy posloupnosti)

   (a) Dokažte, že zóna jedné přímky v arrangementu n přímek v rovině má složitost $O(n)$. **[2]**

   (b) Dokažte, že zóna jedné přímky v arrangementu n jednotkových kružnic v rovině má složitost $O(n\alpha(n))$. **[3]**

4. Nechť $g_1, g_2, \ldots, g_m$ jsou grafy m spojitých po částech lineárních funkcí z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}$, které se dohromady skládají z n úseček a polopřímek. Dokažte, že dolní obálka $g_1, g_2, \ldots, g_m$ má složitost $O(\frac{n}{m}\lambda_3(2m))$. Konkrétně pro $m = O(1)$ je složitost dolní obálky lineární. **[2]**

5. Nechť $A \in \{0,1\}^{n \times n}$ je matice $n \times n$ složená z nul a jedniček neobsahující podmatici tvaru
$$\begin{pmatrix} 1 & * & 1 & * \\ * & 1 & * & 1 \end{pmatrix}$$
   To je, že neexistují indexy $i_1 < i_2$ a $j_1 < j_2 < j_3 < j_4$ takové, že $a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2} = a_{i_1 j_3} = a_{i_2 j_4} = 1$.

   (a) Dokažte, že počet jedniček v matici A je nejvýše $\lambda_s(n) + O(n)$, kde s je vhodná konstanta. **[2]**

   (b) Dokažte, že počet jedniček v matici A je nejvýše $\lambda_3(n) + O(n)$. **[2]**