Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

2. série

nápověda 30.3.2005, odevzdat do 7.4.2005

Půlící přímky

1. (Lovászovo lemma v rovině) Nechť X je množina $2n$ bodů v rovině v obecné poloze a l je svislá přímka taková, že k bodů X leží nalevo od ní a $2n-k$ bodů napravo od ní. Dokažte, že l kříží přesně $min(k, 2n-k)$ půlících hran. **[3]**
2. S využitím odhadu z prvního příkladu, tj. že počet půlících hran křížících svislou přímku je $O(n)$, dokažte, že maximální počet půlících hran n-bodové množiny v rovině je $O(n^{3/2})$. **[2]**
3. Nechť X je konečná množina bodů v obecné poloze v rovině. k-díra je k-bodová konvexně nezávislá podmnožina X taková, že $\mathbf{conv}(D) \cap X = D$. Dokažte:

   (a)
   $$\sum_{k=1}^{|X|} (-1)^k \cdot \#k\text{-děr} = -1$$
   [2]

   (b)
   $$\sum_{k=1}^{|X|} (-1)^k \cdot k \cdot \#k\text{-děr} = -\#\text{bodů uvnitř } \mathbf{conv}(X)$$
   [2]

   Nápověda: posouvání bodů po křivkách do vhodné konfigurace.

Konvexně nezávislé podmnožiny

1. Dokažte, že pro každé k exituje $n(k)$ takové, že každá množina $n(k)$ bodů v rovině obsahuje k-bodovou konvexně nezávislou podmnožinu nebo k bodů ležících na na přímce. **[2]**
2. Dokažte Erdős-Szekeresovu větu v $\mathbf{R}^3$: Pro každé k exituje $n(k)$ takové, že každá množina $n(k)$ bodů v $\mathbf{R}^3$ v obecné poloze obsahuje k-bodovou konvexně nezávislou podmnožinu. Dokážete to zobecnit pro $\mathbf{R}^d$? **[2]**
3. Dokažte, že n-bodová Hortonovská množina neobsahuje konvexně nezávislou podmnožinu s více než $4\log(n)$ body. **[2]**
4. Dokažte, že každá dostatečně velká množina bodů v $\mathbf{R}^3$ v obecné poloze obsahuje 7-díru. **[3]**
5. Dokažte, že množina $\{(i,j); i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,m\}$ neobsahuje konvexně nezávislou podmnožinu s více než $Cm^{2/3}$ body, kde C je vhodná konstanta. **[4]**