Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

1. série - Počítání incidencí přímka-bod

nápověda 9.3.2005, odevzdat do 16.3.2005

1. Nechť $I_{1circ}(m,n)$ označuje maximální počet incidencí mezi m body a n jednotkovými kružnicemi v rovině a nechť $U(n)$ označuje maximální počet jednotkových vzdáleností pro n-bodovou množinu v rovině.

   (a) Ukažte, že $I_{1circ}(2n,2n) = O(I_{1circ}(n,n))$. **[1]**

   (b) Ukažte, že $I_{1circ}(n,n) = O(U(n))$. **[1]**

2. Nechť $I_{1circ}(m,n)$ označuje maximální počet incidencí mezi m body a n jednotkovými kružnicemi v rovině. Ukažte, že $I_{1circ}(n,n) = O(n^{4/3})$. **[3]**

3. Ukažte, že existuje reálná konstanta $c > 0$ taková, že pro každou konečnou podmnožinu nenulových reálných čísel $\mathcal{A}$ platí $\max\{|\mathcal{A}+\mathcal{A}|, |\mathcal{A}/\mathcal{A}|\} \geq c|\mathcal{A}|^{5/4}$, kde $\mathcal{A}+\mathcal{A} = \{a_1+a_2 : a_1, a_2 \in \mathcal{A}\}$ a $\mathcal{A}/\mathcal{A} = \{a_1/a_2 : a_1, a_2 \in \mathcal{A}\}$. **[2]**

4. Pro $t \geq 1$ položme $n = 4t^6$ a $P = \{(i,j) : i,j = 1,\ldots,\lfloor\sqrt{n}\rfloor\}$. Nechť $S = \{(a,b) : a,b = 1,\ldots,t; \gcd(a,b) = 1\}$, kde $\gcd(a,b)$ označuje největší společný dělitel a a b. Pro každý bod $p \in P$, nechť L_p označuje množinu všech přímek procházejících bodem p se směrnicí a/b pro $(a,b) \in S$ a nechť $L = \bigcup_{p\in P} L_p$.

   (a) Ukažte, že $|L| \leq n$. **[2]**

   (b) Ukažte, že existuje $c > 0$ takové, že $|S| \geq ct^2$ a tedy platí $I(P,L) = \Omega(nt^2) = \Omega(n^{4/3})$. **[4]**

5. Nechť P je m-bodová množina v rovině.

   (a) Ukažte, že maximalní možný počet přímek takových, že každá z nich obsahuje alespoň $k > 1$ bodů P, je $O(m^2/k^3 + m/k)$ a že maximální počet incidencí těchto přímek s množinou P je $O(m^2/k^2 + m)$. **[3]**

   (b) Nechť $0 < k \leq \sqrt{m}$ je celočíselný parametr. Ukažte, že nejvýše $O(m^2/k)$ dvojic bodů z P leží na přímkách, které obsahují nejméně k a nejvýše $\sqrt{m}$ bodů P. Podobně pro $K > \sqrt{m}$ ukažte, že nejvýše $O(Km)$ dvojic bodů z P leží na přímkách, které obsahují nejméně $\sqrt{m}$ a nejvýše K bodů P. **[4]**

   (c) Ukažte, že existuje reálná konstanta $c > 0$ taková, že libovolná m-bodová množina $P \subseteq \mathbb{R}^2$, která neobsahuje alespoň cm bodů ležících v přímce, musí svými body určovat nejméně cm^2 různých přímek. **[2]**

   (d) Ukažte, že existuje reálná konstanta $c > 0$ taková, že každá m-bodová množina P, jejíž body neleží na jedné přímce, obsahuje bod, kterým prochazí nejméně cm různých přímek určených body P. **[1]**