Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

7. serie - Arrangementy

nápověda 15.12.2004, odevzdat do 12.1.2005

1. Spočtěte počet stěn dimenzí 1 a 2 arrangementu n rovin v obecné poloze v $\mathbf{R}^3$. **[2]**
2. Dokažte, že počet *neomezených* buněk v arrangmentu n nadrovin v $\mathbf{R}^d$ je $O(n^{d-1})$, pro d pevné. **[2]**
3. Kolik je d-dimenzionálních buněk v arrangementu $\binom{d}{2}$ nadrovin v $\mathbf{R}^d$, které odpovídají rovnicím $\{x_i = x_j\}$, kde $1 \le i < j \le d$? **[3]**
4. Nechť $P = \{p_1, p_2 \dots p_n\}$ je množina bodů v rovině. Řekneme, že body x a y mají *stejný výhled* na P, jestliže jsou z nich body P vidět ve stejném cyklickém pořadí (tj. jestliže otáčíme polopřímkou s počátkem v bodu x resp. y po směru hodinových ručiček, tato přímka nachází body P ve stejném pořadí). Předpokládejme, že ani jeden z bodů x a y nepatří do P a neprochází jimi žádná přímka určená dvěma body z P.
   (a) Ukažte, že maximální počet různých "výhledů" je $O(n^4)$. **[2]**
   (b) Ukažte, že odhad v předchozím bodě nelze obecně zlepšit. **[5]**
5. (Průnikové grafy) Nechť S je množina n úseček v rovině. Průnikový graf S je graf na n vrcholech, které odpovídají úsečkám a dva vrcholy jsou spojené hranou právě tehdy když jim odpovídající úsečky mají neprázdný průnik.
   (a) Dokažte, že graf získaný z K_5 podrozdělením každé hrany právě jednou není průnikový graf úseček. (Dokonce to není ani průnikový graf souvislých křivek v rovině). **[4]**
   (b) Dokažte, že většina grafů není průnikovým grafem úseček. Všech grafů na n vrcholech je $2^{\binom{n}{2}} = 2^{n^2/2+O(n)}$. Průnikových grafů úseček je jenom $2^{O(n \log n)}$ (pozor na kolineární úsečky!). Použijte větu o počtu znaménkových kombinací. **[3]**

7. serie - Věta o zóně, Inkrementální algoritmy

nápověda 5.1.2005, odevzdat do 12.1.2005

1. Nechť $\mathcal{C}$ je množina všech buněk (stěn maximální dimenze) arrangementu množiny n přímek v rovině. Dokažte, že $\sum_{C \in \mathcal{C}} f_0(C)^2 = O(n^2)$ ($f_0(C)$ je počet vrcholů buňky C). **[3]**
2. Určete přesně maximální možný počet lichoběžníků v lichoběžníkové dekompozici množiny n úseček v obecné poloze. **[2]**
3. Představme si řadu n prázdných koleček. Pozorovatele posadíme do jedné z $n-1$ mezer mezi nimi. Náhodnou podmnožinu r koleček obarvíme načerno. Ukažte, že očekávaný počet prázdných koleček, který pozorovatel vidí je nejvýše $2(n-r)/(r+1)$. Pozorovatel vidí skrz prázdná kolečka, ale už nevidí skrz černá kolečka. **[2]**
4. Sledujete soutěž ve skocích do dálky. Soutěží n klokanů. Každý má jeden pokus. Pro jednoduchost berme, že každý klokan má pevně danou vzdálenost, kterou vždy skočí a že žádní dva klokani neskočí stejně daleko. Klokani skáčí v náhodném pořadí, kde všecha pořadí mají stejnou pravděpodobnost. Určete střední hodnotu počtu skoků, které překonají dosavadní nejdelší skok. **[3]**