Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

4. serie - Konvexní polytopy

nápověda 24.11.2003, odevzdat do 1.12.2003

1. Dokažte, že průnik dvou stěn mnohostěnu P je stěna mnohostěnu P. **[1]**

2. Nechť P je mnohostěn dimenze d s n vrcholy a m fasetami. Očíslujme vrcholy od 1 do n a fasety od 1 do m. Označme $M(P) = (m_{ij}) \in \{0,1\}^{m \times n}$ matici incidence vrchol-faseta pro mnohostěn P, tj. $m_{ij} = 1$ právě tehdy, když faseta i obsahuje vrchol j. Jde z této matice vždy jednoznačně zrekonstruovat polytop P? Jde to i pro případ, že P je polyedr? **[2]**

3. Ukažte, že jakýkoliv zároveň simpliciální a jednoduchý mnohostěn je simplex nebo n-úhelník. **[3]**

4. Buď $\beta \subset \mathbf{R}^d$ křivka $\{(\frac{1}{t+1}, \frac{1}{t+2}, \ldots, \frac{1}{t+d}),\ t \in \mathbf{R},\ t > 0\}$. Ukažte, že každou nadrovinu protíná β v nejvýše d bodech (a pokud je d průsečíků, žádný z nich není bodem dotyku), a n různých bodů na β tvoří množinu vrcholů mnohostěnu, který je kombinatoricky ekvivalentní cyklickému mnohostěnu. **[3]**

5. Popište stěny $(n-1)$-dimenzionálního permutaedru kombinatoricky. Jaké množiny permutací tvoří množiny vrcholů stěn? Připomeňme, že $(n-1)$-dimenzionální permutaedr je definován jako konvexní obal $n!$ vektorů, získaných zpermutováním souřadnic vektoru $(1, 2, 3, \ldots, n)$ v $\mathbf{R}^n$. **[4]**

6. Ukažte, že graf každého d-dimenzionální konvexního mnohostěnu je d-souvislý. **[5]**