KOMBINATORICKÁ A VÝPOČETNÍ GEOMETRIE II
Domácí úkol č. 1 (termín odevzdání: za 3 týdny)

Výsledky některých z následujících problémů se dají najít v literatuře, ale pro získání bodů je nutné popsat postup výpočtu.

1. Dokažte, že pro každou d-dimenzionální mřížku Λ platí nerovnost
$$\rho(\Lambda)\rho(\Lambda^*) \leq \frac{d}{4},$$
kde $\rho(\Lambda)$ je pakovací poloměr mřížky Λ. Použijte Minkowského větu a vzorec pro objem koule. **3**

2. Z tvrzení věty o placatosti pro kouli odvoďte platnost jejího tvrzení pro libovolný elipsoid E. **2**

3. Buď Λ mřížka a $u \in \Lambda$, $u \neq 0$ mřížový vektor. Dokažte, že ortogonální projekce Λ na nadrovinu $u^{\perp}$ je též mřížka. **2**

4. Nechť $\sigma(\Lambda)$ značí podíl objemu prostoru vyplněného koulemi poloměru $\rho(\Lambda)$ se středy v bodech mřížky Λ.

   (a) Definujte toto $\sigma(\Lambda)$ formálně. **1**

   (b) Spočtěte jej pro mřížky $\mathbf{Z}^d$, $D_d = \{x \in \mathbf{Z}^d, \sum_{i=1}^d x_i \text{ sudé}\}$ a $A_d = \mathbf{Z}^{d+1} \cap \{x \in \mathbf{R}^{d+1}, \sum_{i=1}^{d+1} x_i = 0\}$. Pro každou dimenzi $d \geq 2$ určete, která z těchto tří mřížek má největší σ. **4**

5. Buď $E_8 = D_8 \cup \left(D_8 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)\right)$.

   (a) Ověřte, že $E_8^* = E_8$. **2**

   (b) Spočtěte hustotu $\sigma(E_8)$. **2**

   (c) Spočtěte pokrývací poloměr $\mu(E_8)$. **3**