Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

6. série - Arrangementy

nápověda 10.12.2003, odevzdat do 7.1.2004

1. Spočtěte počet stěn dimenzí 1 a 2 pro arrangement n rovin v obecné poloze v $\mathbf{R}^3$. **[2]**
2. Dokažte, že počet *neomezených* buněk v arrangementu n nadrovin v $\mathbf{R}^d$ je $O(n^{d-1})$ (pro pevné d). **[2]**
3. Kolik je d-dimenzionálních buněk v arrangementu nadrovin v $\mathbf{R}^d$, které odpovídají rovnicím $\{x_i = x_j\}$, kde $1 \leq i < j \leq d$? **[3]**
4. Nechť $\mathcal{C}$ je množina všech buněk (stěn maximální dimenze) arrangementu množiny n přímek v rovině. Dokažte, že $\sum_{C \in \mathcal{C}} f_0(C)^2 = O(n^2)$ ($f_0(C)$ je počet vrcholů buňky C). **[3]**
5. Nechť $P = p_1, p_2, \ldots, p_n$ je množina bodů v rovině. Říkejme, že body x a y mají stejný výhled na P, jestliže body P jsou z nich vidět ve stejném cyklickém pořadí (tj. jestliže otáčíme po směru hodinových ručiček polopřímkou s počátkem v bodu x resp. y, tato přímka nachází body ve stejném cyklickém pořadí). Toto uvažujeme pouze pro body x a y, které neleží v P a neprochází jimi žádná přímka určená dvěma body z P.

   (a) Ukažte, že maximální počet různých „výhledů“ je $O(n^4)$. **[2]**

   (b) Ukažte, že odhad v předchozím bodě nelze obecně zlepšit. **[5]**

7. série - Inkrementální algoritmy, Lineární programování

nápověda 17.12.2003, odevzdat do 7.1.2004

1. Určete přesně maximální možný počet lichoběžníků v lichoběžníkové dekompozici množiny n úseček v obecné poloze. **[2]**
2. Sledujete soutěž ve skocích do dálky. Soutěží n soutěžících, každý má jeden pokus. Pro jednoduchost berme, že každý soutěžící má pevně danou vzdálenost, kterou vždy skočí a žádní dva soutěžící neskočí stejně daleko. Soutěžící skáčí v náhodném pořadí (všechna pořadí mají stejnou pravděpodobnost). Určete střední hodnotu počtu skoků, které překonají dosavadní nejdelší skok. **[3]**
3. Navrhněte algoritmus, který pro danou množinu n bodů v rovině rozhodne v čase $O(n)$, zda její konvexní obal je trojúhelník. **[2]**
4. Nechť P je konvexní mnohostěn v $\mathbb{R}^3$. Zformulujte problém hledání největší koule vepsané do P jako úlohu lineárního programování s co nejmenším počtem proměnných. **[2]**
5. Nechť P a Q jsou konvexní mnohoúhelníky v rovině. Ukažte, že problém nalezení nejmenšího parametru $\lambda > 0$ takového, že nějaká posunutá kopie λQ je obsažena v P, může být formulován jako úloha lineárního programování s malým počtem proměnných. **[2]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`