Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

4. serie - Konvexní polytopy

nápověda 19.11.2003, odevzdat do 3.12.2003

1. Popište stěny $(n-1)$-dimenzionálního permutaedru kombinatoricky. Jaké množiny permutací tvoří množiny vrcholů stěn? Připomeňme, že $(n-1)$-dimenzionální permutaedr je definován jako konvexní obal $n!$ vektorů, získaných zpermutováním souřadnic vektoru $(1, 2, 3, \dots, n)$ v $\mathbf{R}^n$. **[3]**

2. Buď $\beta \subset \mathbf{R}^d$ křivka $\{(\frac{1}{t+1}, \frac{1}{t+2}, \dots, \frac{1}{t+d}),\ t \in \mathbf{R},\ t > 0\}$. Ukažte, že každou nadrovinu protíná β v nejvýše d bodech (a pokud je d průsečíků, žádný z nich není bodem dotyku), a n různých bodů na β tvoří množinu vrcholů mnohostěnu, který je kombinatoricky ekvivalentní cyklickému mnohostěnu. **[4]**

3. Ukažte, že graf každého 3-dimenzionální konvexního mnohostěnu je 3-souvislý. **[5]**

5. série - Voroného diagramy

nápověda 26.11.2003, odevzdat do 3.12.2003

1. Dokažte, že $\mathrm{reg}(p)$ bodu p ve Voroného diagramu konečné množiny bodů $P \subset \mathbb{R}^d$ je neomezený právě tehdy, když p leží na hranici $\mathrm{conv}(P)$. **[2]**

2. Uvažte konečnou množinu disjunktních úseček v rovině. Jaké křivky mohou ohraničovat regiony v jejich Voroného diagramu? Region dané úsečky je množina bodů, pro které je tato úsečka nejbližší. **[2]**

3. Ukažte, že Voroného diagram n-bodové množiny v $\mathbb{R}^3$ může obsahovat až cn^2 vrcholů, kde c je vhodná kladná konstanta. **[4]**

4. Nechť P je konečná množina bodů v rovině, jejíž žádné tři body neleží na společné přímce a žádné čtyři body neleží na společné kružnici. Definujme graf DT na množině P následovně: dva body a a b jsou spojeny hranou právě tehdy, pokud existuje kruh tak, že oba body a a b leží na jeho hranici a žádný z bodů P neleží v jeho vnitřku.

   (a) Ukažte, že DT je rovinný graf, jehož všechny stěny nepočítaje vnější stěnu jsou trojúhelníky. **[3]**

   (b) Jak spolu souvisí DT a Voroného diagram množiny P? **[3]**

   (c) Vezměme si na množině P uplný graf s ohodnocením hran daným Euklidovskou vzdáleností příslušných bodů. Nechť T je minimální kostrou tohoto grafu. Ukažte, že všechny hrany T jsou také hrany DT. **[3]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`