

## Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

### 2. serie - Minkowského věta a aplikace

náповěda 29.10.2003, odevzdat do 5.11.2003

1. Dokažte: Pokud  $C \subseteq \mathbf{R}^d$  je konvexní, symetrická okolo počátku, omezená taková, že  $\text{vol}(C) > k2^d$ , potom  $C$  obsahuje aspoň  $2k$  mřížových bodů. [3]
2. Ukažte, že pro iracionální číslo  $\alpha$  existuje nekonečně mnoho párů čísel  $m, n$  takových, že  $|\alpha - m/n| < 1/n^2$ . [1]
3. Dokažte, že pro  $\alpha = \sqrt{2}$  existuje jen konečně mnoho dvojic  $m, n$  splňujících  $|\alpha - m/n| < 1/4n^2$ . [3]
4. Nechť  $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$  jsou reálná čísla. Dokažte, že pro dané  $N \in \mathbf{N}$  existují  $m_1, m_2, n \in \mathbf{N}, n < N$  taková, že  $|\alpha_i - \frac{m_i}{n}| < \frac{1}{n\sqrt{N}}, i = 1, 2$ . [4]
5. Nechť  $M \subset \mathbf{Z}^2$  je konvexní mřížový mnohoúhelník (jeho vrcholy leží v mřížových bodech). Dokažte, že jeho objem je roven počtu mřížových bodů uvnitř plus polovina počtu mřížových bodů na hranici minus jedna:

$$\text{vol } M = |M \cap \mathbf{Z}^2| - 1/2|\partial M \cap \mathbf{Z}^2| - 1$$

[2]

### 3. serie - Dualita

náповěda 5.11.2003, odevzdat do 12.11.2003

1. Nechť  $C = \{x \in \mathbf{R}^d : |x_1| + \dots + |x_d| \leq 1\}$ . Ukažte, že  $C^*$  je krychle  $\{x \in \mathbf{R}^d : \max |x_i| \leq 1\}$ . Nakreslete obě tělesa pro  $d = 3$ . [2]
2. Ukažte, že pro libovolnou množinu  $X \subset \mathbf{R}^d$  je  $(X^*)^*$  rovno uzávěru  $\text{conv}(X \cup \{0\})$ , kde  $X^*$  označuje duální množinu k  $X$ . [2]
3. Ukažte, že  $C = C^*$  právě tehdy, když  $C$  je jednotková koule se středem v počátku. [2]
4. Uvažme  $n$  úseček v rovině takových, že jejich prodloužení prochází počátkem. Ukažte, že když každé 3 z nich lze protnout přímkou, pak lze protnout jednou přímkou všechny z nich. [3]