Příklady z Kombinatorické a Výpočetní Geometrie

1. serie - do 15.10.2003

1. Pás šířky w je část roviny ohraničená dvěmi rovnoběžnými přímkami ve vzdálenosti w. Šířka množiny $X \subseteq \mathbb{R}^2$ je nejmenší šířka pásu obsahujícího X. Dokažte, že platí:
   (a) Kompaktní konvexní množina šířky 1 obsahuje úsečku jednotkové délky v každém směru. [3]
   (b) Nechť každá trojice ze souboru $C_1, C_2, \dots, C_n$ uzavřených konvexních množin má průnik šířky alespoň 1, pak průnik všech má šířku alespoň 1. [2]
2. Konečná množina bodů A v $\mathbb{R}^d$ je v obecné poloze, pokud každých $d+1$ bodů je afině nezávislých. V situaci jako v Radonově větě (A je $d+2$ bodová množina v $\mathbb{R}^d$) nazvěme bod $x \in \mathbb{R}^d$ Radonovým bodem, pokud leží v průniku konvexních obalů dvou disjunktních podmnožin množiny A. Dokažte, že pokud A je v obecné poloze, pak existuje právě jeden Radonův bod. [3]
3. Jestliže průnik každé čtveřice konvexních množin z souboru $C_1, \dots, C_n$ obsahuje polopřímku, potom také průnik všech $C_1, \dots, C_n$ obsahuje polopřímku. [4]

Nebodované příklady - na rozmyšlenou do tramvaje:

1. Jak mohou vypadat průniky dvou (2-dimenzionálních) rovin v $\mathbb{R}^4$? Jak vypadá typický případ? Jak to vyjde s nadrovinami v $\mathbb{R}^4$?
2. Objekty v $\mathbb{R}^4$ si můžeme představovat jako třídimenzionální objekty v $\mathbb{R}^3$ pohybující se v čase (čas zde zastupuje čtvrtý rozměr). Pokuste se si takto představit průniky dvou rovin v $\mathbb{R}^4$, jak bylo zadáno v předchozím příkladě.