

1. Opakované hody mincí

Osmkrát házíme férovou mincí (pravděpodobnost panny i orla je 0.5). Určete pravděpodobnosti následujících jevů:

- Počet panen je stejný jako počet orlů.
- Počet panen je větší než počet orlů.
- Pro $i \in [4]$, i -té a $(9-i)$ -té hody mají stejný výsledek.
- Hodili jsme aspoň čtyři hlavy v řadě.

2. Simulace férové mince pomocí neférové

Házíme neférovou mincí, která padne jako panna s pravděpodobností p .

- Jak můžeme simulovat jeden hod férové mince opakovaným házením neférové?
- Jaký je očekávaný počet potřebných hodů?

3. Simulace neférové mince pomocí férové

Opakovaně házíme férovou mincí, abychom simulovali neférovou, která má pravděpodobnost panny $p \in \mathbb{R}$. Jak budeme postupovat? Určete potřebný počet hodů.

4. Užitečné odhady

- Dokažte $n! \leq 2^{n \log_2 n}$.
- Dokažte $(1-p)^n \leq e^{-pn}$ pro $p \in \mathbb{R}$.

5. Třídy složitosti

Definice pravděpodobnostních tříd složitosti jsou na druhé straně.

- Ukažte, že následující definice je ekvivalentní s definicí ZPP:
 - Vždy běží v polynomiálním čase.
 - TRUE** instanci algoritmus přijme s pravděpodobností aspoň $\frac{1}{2}$, jinak odpoví "nevím".
 - FALSE** instanci algoritmus odmítne s pravděpodobností aspoň $\frac{1}{2}$, jinak odpoví "nevím".
- Dokažte následující inkluze:
 - $P \subseteq ZPP$
 - $RP \subseteq NP$
 - $ZPP = RP \cap \text{co-RP}$
 - $RP \cup \text{co-RP} \subseteq BPP$

Definice

- Problém je v **BPP**, pokud $\exists$ algoritmus splňující následující:
 - Vždy běží v polynomiálním čase.
 - Pokud správná odpověď je **TRUE**, algoritmus přijme s pravděpodobností aspoň $\frac{2}{3}$.
 - Pokud správná odpověď je **FALSE**, algoritmus přijme s pravděpodobností nejvýš $\frac{1}{3}$.

- Problém je v **RP** , pokud $\exists$ algoritmus splňující následující:
 - Vždy běží v polynomiálním čase.
 - Pokud správná odpověď je **TRUE** , algoritmus přijme s pravděpodobností aspoň $\frac{1}{2}$.
 - Pokud správná odpověď je **FALSE** , algoritmus vždy zamítne.
- Problém je v **ZPP** , pokud $\exists$ algoritmus splňující následující:
 - Pouze očekávaná doba běhu je polynomiální.
 - Algoritmus vždy odpoví správně.