

Bodové odhady

Zkoumáme posloupnost n.n.v. se stejným rozdělením F_θ , např. $\text{Geom}(\theta), U(0, \theta)$, kde θ je parametr.

- Zapisujeme $X_1, \dots, X_n \sim F_\theta$, tzv. **náhodný výběr** z F_θ (model s parametrem).
- Naměříme $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ a chceme odhadnout θ .
- $\hat{\theta}_n$... nějaká metoda jak odhadnout θ pomocí naměřených dat (hodnot $X_1, \dots, X_n$), angl. *estimator*
- **Odhad metodou momentů**
 - $m_r(\theta) = \mathbb{E}(X^r)$ pro $X \sim F_\theta$... **r -tý moment**
 - * ideální vlastnost rozdělení
 - $\hat{m}_r(\theta) = 1/n \sum_{i \in [n]} X_i^r$... **r -tý výběrový moment**
 - * náhodná veličina, funkce našeho naměřeného vzorku (tj. statistika)
 - Vyřešíme rovnici $m_1(\theta) = \hat{m}_1(\theta)$ pro neznámou θ .
 - Případně soustavu rovnic $m_r(\theta) = \hat{m}_r(\theta)$ pro $r = 1, 2, \dots$ podle potřeby.
- **Odhad metodou maximální věrohodnosti (Maximal Likelihood)**
 - $L(\theta; x_1, \dots, x_n) = P[X_1 = x_1 \wedge \dots \wedge X_n = x_n]$ pravd. pozorovaných dat závislá na parametru θ nebo $L(\dots) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$... hustota pravděpodobnosti ...
 - $l(\theta; x_1, \dots, x_n) = \log L(\dots)$... pro snazší výpočty.
 - Hledáme θ , pro které je maximální $L(\theta; x_1, \dots, x_n)$, resp. $l(\dots)$.
 - Obvykle pomocí derivací funkce L , resp. l .
- **bias (vychýlení):** $\mathbb{E}(\hat{\theta}_n - \theta)$
 - θ skutečný parametr,
 - $\hat{\theta}_n$ náš odhad (náhodná veličina, protože závisí na naměřených datech).
- Odhad je **nevychýlený/nestranný/unbiased**: $\text{bias} = 0$.
- Odhad je **konzistentní**: $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$: pro všechna $\epsilon > 0$ platí $P[|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon] \rightarrow 0$.

1. Uniformní rozdělení

Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{U}(0, \theta)$.

- Navrhněte bodový odhad θ momentovou metodou.
- Navrhněte bodový odhad θ metodou maximální věrohodnosti.
- Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní. Pokud ne, jde to nějak napravit?

2. Geometrické rozdělení

Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim \text{Geom}(p)$.

- Navrhněte bodový odhad p momentovou metodou.
- Navrhněte bodový odhad p metodou maximální věrohodnosti.
- Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný.

3. Exponenciální rozdělení

Pro náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(1/\theta)$ řešte části (a)–(c) jako výše.

- Navrhněte bodový odhad θ momentovou metodou.
- Navrhněte bodový odhad θ metodou maximální věrohodnosti.
- Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.