

Celková pravděpodobnost

1. Porovnávání uniformních rozdělení

Pro n.n.v. $X \sim U(0, 2)$ a $Y \sim U(0, 1)$ zkoumáme $P[X < Y]$. Řešte

- Přímo z obrázku.
- Rozborem možností n.v. Y pomocí vzorce (analogie věty o celkové pravděpodobnosti)

$$P[X < Y] = \int_0^1 f_Y(y)P[X < Y|Y = y]dy.$$

- Rozborem možností n.v. X pomocí vzorce

$$P[X < Y] = \int_0^2 f_X(x)P[X < Y|X = x]dx.$$

Konvoluce

2. Suma uniformních rozdělení

Buďte $X, Y, Z \sim U(0, 1)$ nezávislé náhodné veličiny.

- Jaké je rozdělení $X + Y$? Určete hustotu (dvěma způsoby) - podle konvolučního vzorce i "podle obrázku".
- Jaké je rozdělení $X + Y + Z$? Pro jednoduchost určete hustotní funkci jen na intervalu $[0, 1]$.

Aplikace nerovností

Soupis vzorečků

- Konvoluce:** Nechť X, Y jsou spojité n.n.v. Pak $S = X + Y$ má hustotu $f_S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(s-x)dx$.
- Markovova nerovnost:** $P[X \geq a\mathbb{E}(X)] \leq 1/a$ pro $X \geq 0$.
- Čebyševova nerovnost:** $P[|X - \mathbb{E}(X)| \geq t\sigma_X] \leq 1/t^2$.

3. Hody kostkou

Házíme kostkou, za 1 a 2 dostaneme bod. Označme X počet bodů, které dostaneme po n (nezávislých) hodech. Odhadněte pravděpodobnost, že $X \geq n/2$.

- Pomocí Markovovy nerovnosti.
- Pomocí Čebyševovy nerovnosti.
- Pro konkrétní n , jak lze tuto hodnotu určitě přesně?

4. Měření výšky

Statistik chce odhadnout průměrnou výšku h (v metrech) lidí v nějaké populaci, pomocí n nezávislých vzorků $X_1, \dots, X_n$, které vybíráme uniformně náhodně se všech možných lidí. Pro odhad použije výběrový průměr $\bar{X}_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$. Odhaduje, že směrodatná odchylka jednoho výběru je nejvýše 1 metr.

- Jak velké n má volit, aby směrodatná odchylka $\bar{X}_n$ byla nejvýše 1 cm?
- Pro jaké n zajistí Čebyševova nerovnost, že $\bar{X}_n$ se liší od h nejvýše o 5 cm s pravděpodobností alespoň 99%?
- Statistik si všimne, že všichni měření lidé mají výšku v intervalu (1.4, 2.1). Jak má upravit odhad směrodatné odchylky? Jak se změní odpovědi na předchozí otázky?

5. Písemka

Víme, že průměrný počet bodů z písemky byl 40 (ze 100). Odhadněte odsud podíl studentů s alespoň 80 body. Vylepšete odhad, pokud víte, že směrodatná odchylka počtu bodů je 10.

6. Odhad kruhu

Počítání obsahu kruhu náhodným samplováním. Vygenerujeme náhodný bod ve čtverci (obě souřadnice budou mít rozdělení $U(0, 1)$). Označíme X_i indikátor jevu "i-tý bod leží ve vepsaném kruhu".

- a) Určete $\mathbb{E}[X_i]$, $\text{Var}[X_i]$.
- b) Položte $\bar{X}_n = X_1 + \dots + X_n / n$. Určete $\mathbb{E}[\bar{X}_n]$ a $\text{Var}[\bar{X}_n]$.
- c) Pro jaké n čekáte, že dostaneme výsledek správně na jedno desetinné místo? Na dvě, tři, ...?
- d) Jiný výpočet obsahu kruhu: $Y_i = \sqrt{1 - U_i^2}$, kde $U_i \sim U(0, 1)$. Uvědomte si, že $\mathbb{E}[Y_i]$ je obsah čtvrtkruhu, tedy $\pi/4$. Jaké je $\text{Var}[Y_i]$? Jaké je $\text{Var}[\bar{Y}_n]$?
- e) Která metoda je přesnější?

Nápověda

- 2: Použijte vzorec na konvoluce.
- 3: Jaké je rozdělení X ? Pamatujete si vzoreček na jeho střední hodnotu a rozptyl?
- 4: Jak se zjistí rozptyl součtu nezávislých náhodných veličin? Rozptyl násobku veličiny konstantou?