Distribuční funkce a nezávislost

1. Minimum z exponenciálních rozdělení

Nechť $X_i \sim Exp(\lambda_i)$ pro $i = 1, ..., n$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Označme $M = \min(X_1, ..., X_n)$. Ukažte, že $M \sim Exp(\lambda_1 + ... + \lambda_n)$.

2. Maximum z uniformních rozdělení

Buď Y maximum z n uniformně náhodných čísel z intervalu $[0, 1]$.

a) Najděte distribuční funkci F_Y.
b) Odsud určete hustotu f_Y.
c) Spočtěte $\mathbb{E}[Y]$.
d) Jak je to pro minimum těch čísel?

Sdružená hustota

3. Sdružená exponencionální hustota

Nechť X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x, y) = e^{-x-y}$ pro $x, y > 0$ (a 0 jinak).

a) Určete marginální hustoty f_X, f_Y.
b) Určete také distribuční funkce $F_X, F_Y, F_{X,Y}$.
c) Jsou X, Y nezávislé?
d) Najděte $P[X + Y \leq 1]$ a $P[X > Y]$.

4. Buffonova jehla

Na nekonečnou podlahu hodíme náhodně jehlu délky l. Podlaha je z prken, jejichž okraje tvoří rovnoběžné přímky ve vzdálenosti $d \geq l$. Určete pravděpodobnost, že jehla bude přesahovat okraj některého prkna.

Celková pravděpodobnost

5. Porovnávání uniformních rozdělení

Pro n.n.v. $X \sim U(0, 2)$ a $Y \sim U(0, 1)$ zkoumáme $P[X < Y]$. Řešte

a) Přímo z obrázku.
b) Rozborem možností n.v. Y pomocí vzorce (analogie věty o celkové pravděpodobnosti)

$$P[X < Y] = \int_0^1 f_Y(y) P[X < Y | Y = y] dy.$$

c) Rozborem možností n.v. X pomocí vzorce

$$P[X < Y] = \int_0^2 f_X(x) P[X < Y | X = x] dx.$$

Konvoluce

6. Suma uniformních rozdělení

Buďte $X, Y, Z \sim U(0, 1)$ nezávislé náhodné veličiny.

a) Jaké je rozdělení $X + Y$? Určete hustotu (dvěma způsoby) - podle konvolučního vzorce i "podle obrázku".
b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$? Pro jednoduchost určete hustotní funkci jen na intervalu $[0, 1]$.

7. Suma exponenciálních rozdělení

Buďte $X, Y, Z \sim Exp(\lambda)$ nezávislé náhodně veličiny.

a) Jaké je rozdělení $X + Y$?

b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$?

Nápověda

1: Vyjádřete $P[M > m]$ pomocí $P[X_i > m]$ pro $i = 1, ..., n$.

2: a) Jaká je distribuční funkce Y pomocí distribučních fcí těch uniformně náhodných čísel? b) $f = F'$

3d: Jedna část je lehká. Pro druhou nakreslete, přes jakou množinu se má integrovat. Pak případně vyjádřete jako dvojný integrál se správně zapsanými mezemi. Pokud zvlédnete to, zbytek je lehký.

4: Nakreslete obrázek a popište polohu jehly pomocí dvou náhodných proměnných (posun a úhel).

6, 7: Použijte vzorec.

Soupis vzorečků

- Vztah sdružené hustoty a sdružené distribuční funkce

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s, t)dtds$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

- Marginální hustota ze sdružené

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dx$$

- pro "rozumnou" množinu A platí $P[(X, Y) \in A] = \int_A f_{X,Y}(x, y)dxdy$.
- **nezávislost:** $X \perp Y \iff F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \iff f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$
- **PNS:** $\mathbb{E}[g(X)|B] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|B}(x)dx$
- **Konvoluční vzorec:** Pro spojité nezávislé n.v. X, Y má veličina $Z = X + Y$ hustotu

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z - x)dx.$$