

	Hustota	Distrobuční funkce	Střední hodnota	Rozptyl
Uniformní $U(a, b)$	$1/(b-a)$	$\frac{x-a}{b-a}$	$a+b/2$	$(b-a)^2/12$
Exponenciální $Exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Std. normální $N(0, 1)$	$\varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$	$\Phi(x)$	0	1
Normální $N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})}{\sigma}$	$\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$	μ	σ

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\Phi(x)$	0.00003	0.00135	0.02275	0.15866	0.500000	0.84135	0.97725	0.99865	0.99997

Další hodnoty viz wikipedia: Standard normal table, sekce Cumulative.

Uniformní rozdělení

1. Tramvaje

Předpokládejme, že tramvaj jezdí pravidelně každých 10 minut, ale ne nutně podle jízdního řádu (jsou všechny zpožděné).

- Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?
- Jaká je střední doba čekání? Jaká je směrodatná odchylka?

Exponenciální rozdělení

2. Přepážky

Předpokládejme, že u poštovní přepážky trvá vyřízení jednoho zákazníka čas, který má exponenciální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.

- Jaký je parametr λ , jaká je distribuční funkce?
- Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?
- Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat něco mezi 3 a 5 minutami?

3. Rozdělení bez paměti

Říkáme, že náhodná veličina X (resp. její rozdělení) *nemá paměť*, pokud

$$P[X > s + t | X \geq s] = P[X > t]$$

pro $s, t \geq 0$. Jinými slovy, doba, kterou jsme již čekali, nemá vliv na dobu, kterou budeme ještě čekat. Na třetím cvičení jsme viděli, že geometrické rozdělení nemá paměť.

- Ukažte, že ani exponenciální rozdělení nemá paměť. Platí dokonce, že je to jediné spojitě rozdělení na kladných číslech bez paměti (a geometrické je jediné diskrétní bez paměti), ale to dokazovat nemusíte.
- Využijte toho na výpočet $\mathbb{E}[X | X \geq 1]$ pro $X \sim Exp(\lambda)$.

4. Zkoušky

Doba trvání ústní zkoušky má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 20 minut. Objednání jsou dva studenti, Adam na 10:00, Blanka na 10:20. Pokud se zkoušení Adama protáhne, zkoušení Blanky začne až bude Adam hotový, jinak začne přesně v 10:20.

- Jaká je pravděpodobnost, že když Blanka přijde, bude Adam už vyzkoušený?
- Jaká je střední hodnota času, po který bude muset Blanka čekat na dozkoušení Adama, pokud při jejím příchodu ještě Adam nebyl vyzkoušený?
- Jaká je střední hodnota času, kdy začne zkoušení Blanky?
- Jaká je střední hodnota času, kdy bude Blanka vyzkoušená?

Normální rozdělení

5. Pravidlo 3σ

Nechť $Z \sim N(0, 1)$. Pomocí tabulky funkce Φ ověřte pravidlo 3σ , neboli spočtete

- a) $P[|Z| \leq 1]$
- b) $P[|Z| \leq 2]$
- c) $P[|Z| \leq 3]$
- d) Přepište, co to znamená pro n.v. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

6. Sníh na Ještědu

Budeme modelovat množství sněhu, který bude na Silvestra v lyžarském areálu Ještěd, pomocí normálního rozdělení se střední hodnotou 40 (centimetrů) a směrodatnou odchylkou 10.

- a) Jaká je pravděpodobnost, že nám model určí zápornou hodnotu sněhové pokrývky?
- b) Jaká je pravděpodobnost, že sněhu napadne 50-70 cm?

Práce s distribuční funkcí

7. Zlomený klacek

Metrový klacek rozložíme na dva kusy - lomem v uniformně náhodném bodě. Buď X délka delší části.

- a) Jaké je rozdělení X ?
- b) Určete $E[X]$.

8. Náhodný algoritmus

Pro jistý problém máme k dispozici dva algoritmy, A a B . Algoritmus C spočívá v tom, že si náhodně vybereme, který z algoritmů A, B spustíme - A bude mít pravděpodobnost p , B pravděpodobnost $1 - p$. Dobu běhu A, B, C chápeme jako náhodné veličiny, označíme je X, Y, Z .

- a) Určete F_Z pomocí F_X, F_Y .
- b) Pokud jsou X, Y spojité, určete f_Z pomocí f_X, f_Y .

Nápovědy

- 2, 3a: Použijte vzorec pro distribuční funkci exponenciálního rozdělení.
- 3bc: Jaké je rozdělení $X - 1$ za předpokladu $X \geq 1$?
- 4: b: Použijte příklad 3, c: věta o celkové střední hodnotě, d: linearita
- 5: Potřebujete vždy odečíst dvě vhodné hodnoty v tabulce na první stran 2.
- 6: Převedte na tvrzení o náhodné veličině $N(0, 1)$.
- 7: Spočtete napřed distribuční funkci X , pak její hustotu.
- 8: Věta o celkové pravděpodobnosti platí i tady.