Rozptyl

- **Distribuční funkce** F_X je definována $F_X(x) = P[X \leq x]$.
- Pokud je X spojitá, tak $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} d_X(t)dt$ pro nezápornou funkci f_X (**hustotu** X). Pak

$$P[X \in A] = \int_A f_X(t)dt, \text{ tedy zejména } P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(t)dt.$$

- Platí také $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx$ a obecněji

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f_X(t)dt.$$

- Stejně jako pro diskrétní n.v platí i zde, že $Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

1. Distribuční funkce

Pro n.v. X s distribuční funkcí F_X vyjádřete

a) $P[X \in (0, 1]]$
b) $P[X > 0]$
*c) $P[X < 0]$
*d) $P[X \in [0, 1]]$

2. Hustota

Vyřešte předchozí část znovu, pro n.v. X s hustotou f_X.

3. Funkce náhodných veličin

Nechť $P[X = x] = 0$ pro každé x. (Rozmyslete si, že to není nic divného, a že se to děje pro každou spojitou náhodnou veličinu.) Vyjádřete pomocí F_X distribuční funkci náhodných veličin

a) $-X$
b) $X^+ = \max(0, X)$
c) $|X|$

4. Specifická distribuce

Buď X náhodná veličina s hustotou $f_X(t) = 1/t^2$ pro $t \geq 1$ a $f_X(t) = 0$ jinak.

a) Ověřte, že se jedná o hustotu.
b) Určete $\mathbb{E}[X]$.
c) Spočtěte distribuční funkci F_X.
d) Určete $P[2 \leq X \leq 3]$.
e) Buď $Y = 1/X$. Jaká je distribuční funkce náhodné veličiny Y?
f) Určete hustotu náhodné veličiny Y.

5. Hustota exponenciálního rozdělení

Říkáme, že X má exponenciální rozdělení, $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, pokud

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ pro } x \geq 0, \text{ jinak } 0.$$

Nalezněte f_X. Na přednášce si ukážeme, že $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$.

6. Čekání u přepážky

Předpokládejme, že u poštovní přepážky trvá vyřízení jednoho zákazníka čas, který má exponencionální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.

a) Jaký je parametr λ, jaká je distribuční funkce?

b) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?

c) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat něco mezi 3 a 5 minutami?