Rozptyl

- Definice: **Rozptyl** $\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$
- Věta: $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$
- Věta: $\mathrm{Var}[aX + b] = a^2 \cdot \mathrm{Var}[X]$
- Věta: $\mathrm{Var}[X + Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$ pokud jsou X, Y nezávislé.
- Definice: **Směrodatná odchylka** $\sigma_X := \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$
- Definice: **Variační koeficient** $\mathrm{CV}_X := \frac{\sigma_X}{\mathbb{E}[X]}$ pokud $\mathbb{E}[X] > 0$.

1. Definice rozptylu

Dávají smysl následující "alternativní definice rozptylu"?

a) $\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]]$
b) $\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|]$
c) $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$ pro $k = 3, 4, \ldots$.

2. Binomické rozdělení

Nechť $X \sim \mathrm{Bin}(100, 0.5), Y = 10 \cdot X$ a $Z \sim 10 \cdot \mathrm{Bin}(100, 0.05)$ (tedy $Z/10$ má binomické rozdělení $\mathrm{Bin}(100, 0.05)$). Spočtěte (využitím vzorců z přednášky) $\mathbb{E}[X], \mathrm{Var}[X], \sigma_X,$ CV_X a totéž pro Y, Z.

Náhodné vektory

Sdružená pravděpodobnostní funkce je definována vztahem $p_{X,Y}(x, y) = P[X = x \wedge Y = y]$. "Jednorozměrné funkce" p_X, p_Y se v tomto kontextu nazývají **marginální pravděpodobnostní funkce**. Připomeňte si, jak je zjistit z $p_{X,Y}$.

3. Distribuce jednoduchých operací

Označme X, Y výsledky dvou nezávislých hodů čtyřstěnnou kostkou (s čísly $1, \ldots, 4$).

- Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z_1 = \max(X, Y)$?
- Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z_2 = X + Y$?
- Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z_3 = XY$?

Nápověda: Jakých hodnot nabývá vektor (X, Y), pokud $\max(X, Y) = k$?
Resp. v dalších částech, pokud $X + Y = k$, resp. $XY = k$?

4. Porovnání středních hodnot

- V předchozím příkladu: je větší $\mathbb{E}[Z_2]$ nebo $\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$? Spočtěte obojí podle definice.
- V předchozím příkladu: je větší $\mathbb{E}[Z_3]$ nebo $\mathbb{E}[X^2]$? Spočtěte obojí podle definice.

5. Vektor geometrických veličin

Nezávislé n.v. $X_1, \ldots, X_n$ mají geometrické rozdělení s parametry $p_1, \ldots, p_n$. Jaké je rozdělení náhodné veličiny $M = \min(X_1, \ldots, X_n)$?