- Náhodná veličina je zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- Střední hodnota je $\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in Im(X)} x \cdot P[X = x]$.

Název	Značení	$p_X(k)$	Obraz	$\mathbb{E}[X]$
Bernoulliho	$X \sim \mathrm{Ber}(p)$	$p_X(1) = p,\ \ p_X(0) = 1 - p$	$\{0, 1\}$	p
Binomocké	$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$	$p_X(k) = \binom{n}{k}(1-p)^{n-k} \cdot p^k$	$\{0, 1, ..., n\}$	np
Geometrické	$X \sim \mathrm{Geom}(p)$	$p_X(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$	$\{1, 2, ...\}$	$1/p$
Poissonovo	$X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$	$p_X(k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$	$\{0, 1, ...\}$	λ
Uniformní	$X \sim \mathrm{Unif}(a, b)$	$p_X(k) = 1/b-a+1$	$\{a, a+1, ..., b-1, b\}$	$a+b/2$
Hypergeometrické	$X \sim \mathrm{Hyper}(N, K, n)$	$p_X(k) = ?$	$\{0, 1, ..., \min(n, k)\}$	$n \cdot K/N$

Náhodné veličiny

1. Narozeniny

Na přednášku je přihlášeno 234 lidí. Jaká je pravděpodobnost, že přesně jeden z nich má dnes narozeniny? Ignorujte přestupné roky, uvažujte, že všechny dny jsou stejně pravděpodobné pro narození.

- Použijte binomické rozdělení.
- Použijte aproximaci pomocí Poissonova rozdělení: $\mathrm{Bin}(n, \lambda/n)$ je přibližně $\mathrm{Poi}(\lambda)$.
- Co se změní, když budu uvažovat narozeniny zítra?

2. Poissonovo rozdělení

Nechť náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení, $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$. Připomeňte si vzorec pro pravděpodobnostní funkci $p_X(k)$. Ukažte, že $p_X(k)$ je rostoucí pro $k \leq \lfloor\lambda\rfloor$ a pak klesá, v limitě k nule.

3. Klíče

Na kroužku máme pět klíčů, jeden z nich je správný, ale my nevíme jaký. Zkoušíme otevřít dveře.

a) Po každém pokusu se nám kroužek vysmekne, a vybíráme vždy znovu náhodně.
b) Vybíráme v náhodném pořadí, ale každý klíč jenom jednou (můžeme si je poznačit).

V obou případech zkoumáme, kolikátým pokusem dveře otevřeme. Jaké je rozdělení této náhodné veličiny? Tj., jaká je pravděpodobnost, že dveře otevřeme k-tým pokusem.

c) Jako v (a), ale správné jsou dva klíče z deseti.
d) Jako v (b), ale správné jsou dva klíče z deseti.

4. Opakované hody kostkou

Uvažme $m + n$ hodů spravedlivou kostkou. Označme X počet šestek z prvních m hodů, Y počet šestek z posledních n hodů. Jaká je distribuce X, Y a $X + Y$?

5. Bonbóny

V pytlíku je N bonbónů, z nichž K je dobrých. Náhodně vytáhneme n z nich, označíme X počet dobrých vytažených bonbónů.

- Jak se jmenuje rozdělení n.v. X?
- Jaká je $P[X = k]$?

Nezávislé náhodné veličiny

Definice: d.n.v.

X_1, X_2 jsou nezávislé, pokud jsou nezávislé jevy $\{X_1 = x_1\}$ a $\{X_2 = x_2\}$ pro každou dvojici čísel x_1, x_2.

6. Indikátory

Ukažte, že jevy A, B jsou nezávislé, právě když jsou nezávislé jejich indikátorové veličiny.

7. Nezávislost kumulované pravděpodobnosti

Ukažte, že pro diskrétní nezávislé n.v. X, Y platí

$$P[X \leq x \wedge Y \leq y] = P[X \leq x] \cdot P[Y \leq y].$$

Pro jednoduchost můžete předpokládat, že $\mathrm{Im}(X) = \mathrm{Im}(Y) = \{1, 2, ..., n\}$ pro nějaké n.

Bonus

8. Kasino v St. Petersburgu

Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n-tém hodu, dostaneme odměnu 2^n peněz. Kolik byste byli ochotní zaplatit za účast v této hře?

9. Zápalky

Roztržitý matematik má v každé kapse krabičku s n zápalkami. Pokaždé, když potřebuje zápalku, tak ji vezme z náhodné kapsy. Když takhle najde prázdnou krabičku, označme X počet zápalek v druhé krabičce. Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X.