

Nezávislost jevů

Bud' I libovolná množina indexů. Jevy $\{A_i \mid i \in I\}$ nazveme **nezávislé (independent)**, pokud pro každou konečnou podmnožinu $J \subseteq I$

$$P\left[\bigcap_{j \in J} A_j\right] = \prod_{j \in J} P[A_j].$$

Pokud podmínka platí jen pro dvouprvkové množiny J , nazýváme jevy $\{A_i \mid i \in I\}$ **po dvou nezávislé (pairwise independent)**.

1. Nezávislost dvou hodů mincí

Dva hody mincí modelujeme uniformním prostorem $\Omega = \{PP, PO, OP, OO\}$. Ověřte, že jev A_1 "první hod byla panna" a A_2 "druhý hod byla panna" jsou nezávislé podle definice výše.

2. Důsledek nezávislosti

(pokračování) Máme opět pravděpodobnostní prostor se čtyřmi elementárními jevy $\{PP, PO, OP, OO\}$, ale tentokrát není uniformní. Jako v předchozím příkladu, jev A_1 je "první písmeno je P" a jev A_2 je "druhé písmeno je P". Předpokládáme, že $P[A_1] = p_1$, $P[A_2] = p_2$ a že jevy A_1 a A_2 jsou nezávislé. Ověřte, že tím je určena pravděpodobnost každého jevu v tomto pravděpodobnostním prostoru.

3. Rozšíření nezávislosti

Pokud jsou jevy A, B nezávislé, pak jsou nezávislé i jevy A, B^c . A také jevy A^c, B^c .

(Připomenutí: $A^c := \Omega \setminus A$.)

4. Okrajové případy

- Mohou být jevy A, B nezávislé a zároveň disjunktní?
- Mohou být jevy A, B nezávislé a zároveň $A \subseteq B$?

5. Vztahy nezávislosti dvojic a trojic

Najděte jevy A, B, C (na libovolném pravděpodobnostním prostoru), které

- jsou nezávislé.
- nejsou po dvou nezávislé, ale $P[A \cap B \cap C] = P[A] \cdot P[B] \cdot P[C]$.
- jsou po dvou nezávislé, ale $P[A \cap B \cap C] \neq P[A] \cdot P[B] \cdot P[C]$.

6. Podmíněná nezávislost

Najděte náhodné jevy A, B, C takové, že

- A, B jsou nezávislé za podmínky C , tj.

$$P[A \cap B \mid C] = P[A \mid C] \cdot P[B \mid C],$$

- A, B jsou nezávislé za podmínky C^c ,
- ale A, B nejsou nezávislé?

Příprava na náhodné veličiny

Hody na koš

Prokop hází basketballovým míčem na koš, v každém pokusu má pravděpodobnost zásahu $p = 1/10$, pokusy jsou nezávislé. Skončí po prvním zásahu. Označme X celkový počet hodů.

- Jaká je $P[X > k]$? (Zkuste napřed pro $k = 1, k = 2$.)
- Jaká je $P[X = k]$? (Určení těchto čísel se nazývá popis distribuce X .)
- Jaká je $P[X \geq 10 | X \geq 5]$?

Sudé hody

Pokračování z minulé úlohy: označme $Y = X \bmod 2$, tj. $Y = 0$, pokud je X sudé, jinak $Y = 1$. Určete distribuci Y .

Úspěšné hody

Quido také hází míčem na koš, má pravděpodobnost p , že se trefí a také jsou hody nezávislé. Označme Z počet zásahů z n pokusů. Určete distribuci Z (tj. $P[Z = k]$ pro všechna k).

Bonus

(Kasino v St. Petersburgu) Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n -tém hoďu, dostaneme odměnu 2^n . Kolik byste byli ochotní zaplatit za účast v této hře?