1 Balancování grafu

Dostaneme neorientovaný graf s nezápornými vahami na hranách. Pro danou orientaci definujeme váhu vrcholu jako sumu přes váhy hran, které jsou do něj orientované. Cíl je zorientovat všechny hrany tak, abychom minimalizovali váhu nejtěžšího vrcholu.

- Formulujte ILP a zaokrouhlete relaxaci, abyste získali 2-aproximační algoritmus.

2 Maximální orientovaný řez

Dostaneme orientovaný graf s nezápornými vahami na hranách. Cíl je najít $S \subseteq V$ maximalizující váhy hran z S do $V \backslash S$.

- Formulujte (triviální) $1/4$-aproximační algoritmus.

2.1 Bonus

- Formulujte ILP pro tento problém, zrelaxujte ho a přidejte vrchol v do S s pravděpodobností $1/4 + x_v/2$. Dostali jste $1/2$-aproximaci?

3 Integrality gap

Nechť OPT a OPT_{LP} jsou optimální hodnoty pro daný ILP a jeho relaxaci (a pro danou instanci). Definujeme **integrality gap** tohoto lineárního programu jako worst case $\frac{\text{OPT}}{OPT_{LP}}$ přes všechny instance.

- Ukažte, že MAX-SAT formulace z LP-SAT má integrality gap aspoň $4/3$.
- Ukažte, že triviální LP formulace pro vrcholové pokrytí má integrality gap $2(1 - 1/n)$.

4 Nezávislost hodů mincí

Hodíme férovou mincí n-krát. Pro $i, j \in [n]$, nechť X_{ij} indikuje událost "i-tý hod je stejný jako j-tý hod".

- Ukažte, že X_{ij} jsou po dvou nezávislé, ale ne plně nezávislé.

5 Uniformní nezávislost

Mějme $X_1, ..., X_k$ náhodné proměnné z distribuce $\mathcal{U}(1, 4)$, tj. $\forall i \in [k]\ \forall j \in [4] :\ P[X_i = j] = 1/4$.

- Vytvořte co nejvíc po dvou nezávislých náhodných proměnných s distribucí $\mathcal{U}(1, 4)$.