8. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY 22. 11. 2021

Definice. Graf $G = (V, E)$ je souvislý, jestliže $\forall u, v \in V$ existuje cesta v G s krajními vrcholy u, v.

Definice. Graf $G = (V, E)$ je souvislý, jestliže pro libovolné rozdělení V na dvě množiny A, B takové, že $A \cap B = \emptyset, A \cup B = V$, platí: $\exists a \in A, b \in B : \{a, b\} \in E$.

Příklad 1.

Dokažte, že jsou si obě definice souvislosti grafu ekvivalentní.

Příklad 2.

Ukažte, že doplněk grafu G je nesouvislý právě když G obsahuje úplný bipartitní podgraf na všech vrcholech.

Příklad 3.

Ukažte, že když G obsahuje lichý cyklus jako podgraf, tak potom obsahuje také nějaký lichý cyklus jako indukovaný podgraf.

Příklad 4.

Najděte všechny grafy, které jako podgraf neobsahují

a) cestu délky 2
b) cestu délky 3

Příklad 5.

Najděte všechny grafy, které neobsahují indukovanou cestu délky 2.

***Příklad 6.**

Mějme graf s m hranami. Ukažte, že tento graf obsahuje bipartitní podgraf, který má alespoň $m/2$ hran.

Příklad 7.

Nechť $G = (V, E)$ je graf a $o : E \to \mathbb{R}$ ohodnocení jeho hran. Zavedeme vzdálenost dvou vrcholů jako délku nejkratší cesty mezi nimi. Délku cesty měříme součtem ohodnocení jejích hran.

Bude toto měření vzdáleností metrika, pokud jsou ohodnocení:

a) libovolná?
b) kladná?
c) nezáporná?

Příklad 8.

Nechť G je souvislý graf, který neobsahuje žádný cyklus a u, v dva jeho vrcholy, které nejsou spojené hranou. Ukažte, že $G + \{u, v\}$ již cyklus obsahovat bude.