# 1 Párování v grafech

**Značení.** $G = (V, E), |V(G)| = n, |E(G)| = m$

**Definice.** *Párování* je množina hran $M$ taková, že každý vrchol je incidentní s nejvýše jednou hranou v $M$.

Největší párování je párování největší možné velikosti. Jeho velikost je nejvýše $n/2$.

**Definice.** *Perfektní párování* (1-faktor) je párování, kde každý vrchol je incidentní s právě jednou hranou.

Graf nemusí mít perfektní párování. Příkladem jsou grafy s lichým počtem vrcholů.

**Definice.** *Volný vrchol* je vrchol, který nevidí žádnou hranu párování.
*Střídavá cesta* je cesta, kde jsou všechny vnitřní vrcholy incidentní s párovací hranou a navíc tato hrana je leží na cestě.
*Volná střídavá cesta* je taková střídavá cesta, jejíž koncové vrcholy jsou volné.

**Lemma 1.1** (o volné střídavé cestě)**.** *Párování M je největší iff neexistuje volná střídavá cesta.*

*Důkaz.*

„$\Rightarrow$" Pokud máme volnou střídavou cestu, umíme párování zvětšit jejím invertováním.

„$\Leftarrow$" Nechť $M$ je párování, které není největší. Tedy existuje párovní $M'$, kde $|M'| > |M|$. Definujeme $\tilde{M} = M' \cup M$.

Komponenty souvislosti grafu $(V, \tilde{M})$ jsou buď izolované body nebo cesty nebo kružnice. Komponenta, která má více hran z $M'$, bude cesta liché délky s hranami z $M'$ na koncích. V této cestě jsou koncové vrcholy volné vzhledem k $M$, našli jsme volnou střídavou cestu. □

**Algoritmus.** Edmondsův kytičkový algoritmus
Algoritmus dostane na vstupu párování $M$ a zlepší jej nebo jej prohlásí za největší.
Návrh algoritmu:

- Začneme ve volném vrcholu pro každý z nich.
- Spustíme BFS, kde v každé druhé vrstvě používáme pouze hrany z $M$.

Tímto dostaneme tzv. Edmondsův les.

**Definice.** *Kytička* je tvořená stonkem – střídavá cesta sudé délky z volného vrcholu do květu, což je lichý cyklus, který je střídavý až na vrchol společný se stonkem.

👁 Do květu kytičky vede nejvýše jedna hrana z $M$.

**Lemma 1.2** (o kontrakci květu)**.** *$G$ obsahuje volnou střídavou cestu iff graf $G'$ získaný z $G$ kontrakcí květu obsahuje volnou střídavou cestu.*

Umíme efektivně najít střídavou cestu v původním grafu z toho kontrahovaného.

- V Edmondsově lese hledáme, zda existují hrany mezi sudými i lichými hladinami:
  - v rámci jednoho stromu $\rightarrow$ máme kytičku $\rightarrow$ zkontrahujeme a spustíme algoritmus na vzniklém grafu.
  - mezi dvěma stromy $\rightarrow$ máme volnou střídavou cestu $\rightarrow$ zlepšíme párování a restartujeme algoritmus.
- Pokud hrany mezi sudými hladinami neexistují, v grafu neexistuje volná střídavá cesta, tudíž párování je největší.

**Složitost:** Procedura, která najde kytičku nebo volnou střídavou cestu nebo největší párování, trvá $\mathcal{O}(n + m)$.
$\mathcal{O}(n)$ restartujeme pro původní graf se zlepšeným párováním
$\mathcal{O}(n)$ se zarekurzíme po zkontrahování kytičky
Celkem tedy $\mathcal{O}(n^2(n + m)) = \mathcal{O}(n^2 m)$. Tato rovnost platí, protože můžeme na začátku odstranit všechny izolované vrcholy.

## 1.1 Perfektní párování v obecných grafech

**Věta 1.3** (Hallova)**.** *Bipartitní graf s partitami* $A, B$ *takovými, že* $|A| = |B|$*, má perfektní párování iff* $\forall S \subseteq A : |N(S)| \geq |S|$.

- $\mathrm{cc}(G) =$ množina souvislých komponent grafu $G$
- $\mathrm{odd}(G) =$ množina souvislých komponent liché velikosti
- Nutná podmínka pro existenci perfektního párování: $\forall S \subseteq V(G) : |S| \geq |\,\mathrm{odd}(G \setminus S)|$

**Definice.** Řekněme, že $S \subseteq V(G)$ splňuje Tutteho podmínku, pokud platí předchozí nerovnost.

Podle nutné podmínky pro existenci perfektního párování vidíme, že jakýkoliv graf s lichým počtem vrcholů nesplňuje Tutteho podmínku. Stačí zvolit $S = \emptyset$.

**Věta 1.4** (Tutte)**.** *$G$ má perfektní párování iff každá $S \subseteq V(G)$ splňuje Tutteho podmínku.*

**Definice.** Třešnička jsou dva vrcholy $x, y$ takové, že $(x, y) \notin E$ a $x, y$ mají společného souseda.

**Lemma 1.5** (O třešničce)**.** *Pokud v souvislém grafu existují dva vrcholy mezi nimiž nevede hrana, pak v grafu existuje třešnička.*

*Důkaz.* Nechť $x$ a $y$ jsou dva vrcholy mezi nimiž není v grafu hrana. Uvažujme nejkratší cestu z $x$ do $y$. Ta jistě obsahuje alespoň tři vrcholy. Vezměme libovolné tři po sobě jdoucí vrcholy $a, b, c$ na této cestě. Mezi $a$ a $c$ nevede hrana, protože jinak by cesta nebyla nejkratší. Vrcholy $a, c$ tedy tvoří třešničku. □

*Důkaz Tutteho věty 1.4.*

„$\Rightarrow$“ zjevné

„$\Leftarrow$“ $G$ nemá perfektní párování, ale po přidání libovolné hrany perfektní párování mít bude.

👁 Pokud $G$ obsahuje množinu $S$ porušující Tutteho podmínku, pak pro libovolný graf $G'$, kde $V(G) = V(G'), E(G') \subseteq E(G)$, $S$ také podmínku porušuje.

Pokud $G = K_n$, potom pro $n$ sudé nelze, protože $K_n$ má p.p. Předpokládejme tudíž, že $G$ obsahuje nehranu. Volíme $S$ jako množinu vrcholů, které jsou spojeny se všemi ostatními, tedy $S = \{v \mid \deg v = |V(G)| - 1\}$. Víme, že $S \neq V(G)$.

Nechť komponenty $G \setminus S$ jsou úplné grafy. Pokud $S$ splňuje Tuttovou podmínku, $G$ obsahuje p.p. Z předpokladu neexistence p.p proto $S$ podmínku nesplňuje.

Nyní nechť $G \setminus S$ má komponentu, která není úplným grafem. Pak podle lemmatu o třešničce má třešničku. Označme si ji $a - c - b$. Nutně tedy existuje $d$ nesousedící s $c$. Z našich předpokladů o $G$:

- v $G + (a, b)$ existuje p.p. $M_1 \ni (a, b)$.
- v $G + (c, d)$ existuje p.p. $M_2 \ni (c, d)$.

Uvažujme graf $H = (V(G), M_1 \Delta M_2)$. Tento graf má pouze vrcholy stupně 0 a 2, je to disjunktní sjednocení kružnic. Dále $a, b, c, d$ mají stupně 2.

- $(a, b)$ a $(c, d)$ leží na jiné kružnici. Vezmeme kružnici $C$ obsahující $(c, d)$. Když na $C$ prohodíme párovací hrany, je p.p. v $G$.
- $(a, b)$ a $(c, d)$ leží na stejné kružnici. Pak nastane jedna z možností.
  - cesty mezi hranami $(a, b)$ a $(c, d)$ mají lichou délku. Pak můžeme opět prohodit párovací hrany jako v předchozím bodu.
  - cesty mezi hranami $(a, b)$ a $(c, d)$ mají sudou délku. Pak v grafu $H$ tedy nejsou hrany $(a, c)$ ani $(b, c)$. Nechť $P$ je cesta po $C$ z $b$ do $c$ jdoucí přes vrchol $a$. Pak $M_1 \setminus E(P) \cup (M_2 \cap E(P)) \cup \{(b, c)\}$ je hledané perfektní párování. □

**Důsledek 1.6** (Petersen)**.** *Každý 3-regulární graf bez mostu má perfektní párování.*

*Důkaz.* Vezměme si libovolnou $S \subseteq V(G)$. Ukážeme, že splňuje Tutteho podmínku.

Pokud $|\,\mathrm{odd}(G \setminus S)| = 0$, jsme hotovi. Předpokládejme, tedy že v $G \setminus S$ existuje lichá komponenta $K$. Potom $\sum_{v \in V(K)} \deg_G v = 3|V(K)| = 2|E(K)| +$ počet hran vycházející mimo $K$, což je liché číslo.

Počet hran mezi $K$ a $S$ musí být alespoň 2, jinak máme most, je to tedy alespoň 3. Maximální počet hran ze $S$ je $3|S|$, tudíž lichých komponent může být nejvýše $\frac{3|S|}{3}$, tedy $|S|$. □

**Definice.** $G$ je kritický na párování, pokud $\forall v \in V(G)$ platí, že $G \setminus v$ má perfektní párování.

**Věta 1.7** (Gallai-Edmonds)**.** *Každý graf obsahuje množinu vrcholů $S$ splňující:*

1. *$S$ je párovatelná s $\operatorname{cc}(G \setminus S)$, tedy existuje párování mezi vrcholy $S$ a komponentami $G \setminus S$ takové, že žádné dvě hrany nekončí ve stejné komponentě a všechny vrcholy $S$ jsou spárováné.*
2. *Každá komponenta $G \setminus S$ je kritická na párování.*

*$G$ má perfektní párování iff $|S| = |\operatorname{cc}(G \setminus S)|$.*

*Důkaz.* Poslední tvrzení plyne z Tutteho věty 1.4. Podmínky 1. a 2. budeme dokazovat indukcí podle počtu vrcholů.

Pokud $|V(G)| = 0$, můžeme mít $S$ prázdné. Proto předpokládejme $|V(G)| > 0$.

Deficit množiny $S \subseteq V(G)$ definujme jako $d(S) = |\operatorname{odd}(G \setminus S)| - |S|$. Vidíme, že $d(\emptyset) \geq 0$.

Vezmeme $S$ s největším deficitem a mezi nimi vybereme největší co do počtu vrcholů. Pak $d(S) \geq 0$. Sporem dokážeme, že $(G \setminus S)$ nemá komponenty sudé velikosti.

Nechť $K$ je taková komponenta. Vezmeme $v \in K$ a zkoumáme, jestli $S \cup \{v\}$ není lepší, než $S$. $d(S \cup \{v\}) \geq |\operatorname{odd}(G \setminus S)| + 1 - (|S| + 1) = d(S)$. Máme spor.

Nyní ukážeme kritičnost. Nechť pro spor komponenta $K$ grafu $G - S$ není kritická na párování, tedy $\exists x \in V(K)$ takové, že $K \setminus x$ nemá perfektní párování. Tudíž nesplňuje Tutteho podmínku a existuje $S' \subseteq V(K \setminus x)$, že $|\operatorname{odd}(K \setminus x \setminus S')| > |S'|$.

Jelikož $K \setminus x$ má sudý počet vrcholů, parita $|\operatorname{odd}(K \setminus x \setminus S')|$ i $|S'|$ je stejná. Proto $|\operatorname{odd}(K \setminus x \setminus S')| \geq |S'| + 2$. Zvolme $T = S \cup \{x\} \cup S'$. Potom $d(T) = |\operatorname{odd}(G \setminus T)| - |T| = d(S) + |\operatorname{odd}(K \setminus x \setminus S')| - |S'| - 2 \geq d(S)$.

Protože jsou všechny liché komponenty kritické na párování, můžeme je nahradit kontrakcí za jejich kritický vrchol. Tím dostáváme bipartitiní graf $H$, kde jedna partita je $S$ a druhá je tvořena těmito kontrakcemi.

Pro spor předpokládejme, že $S$ nejde v $H$ spárovat. Podle Hallovy věty existuje $A \subseteq S$, kde vrcholy z $A$ sousedí s méně, než $|A|$ vrcholy $H - S$. Potom v původním grafu $d(S \setminus A) = |\operatorname{odd}(G \setminus (S \setminus A))| - |S| + |A| \geq d(S) - |N(A)| + |A| > d(S)$. □

## 2 Kontrakce a minory

**Definice.** Graf $G$ je $k$-souvislý, pokud má aspoň $k + 1$ vrcholů a po odebrání libovolných $k - 1$ vrcholů bude souvislý.

Každý $k$-souvislý graf má u všech vrcholů stupeň alespoň $k$.

**Lemma 2.1** (O kontrahovatelné hraně)**.** *Každý 3-souvislý graf $G \ncong K_4$ obsahuje hranu $e$ takovou, že $G.e$ je 3-souvislý.*

👁 Pokud $G.e$ není 3-souvislý (a $G$ byl), tak existuje 3-řez obsahující oba koncové vrcholy hrany $e$.

👁 Je-li $S$ minimální řez, každý vrchol z $S$ má hranu do všech komponent $G \setminus S$.

*Důkaz lemmatu 2.1.* Předpokládejme, že žádná hrana nejde zkontrahovat. Tudíž pro každou hranu existuje nějaký 3-řez obsahující oba její koncové vrcholy. Vezmeme hranu $(x, y)$ a vrchol $z$ takové, že $\{x, y, z\}$ je 3-řez a nejmenší komponenta $K$ grafu $G \setminus \{x, y, z\}$ je minimální.

Víme, že $z$ má souseda $w$ v $K$. Ukážeme, že lze zkontrahovat $(w, z)$. Pokud nejde, existuje vrchol $u$ takový, že $\{u, w, z\}$ je 3-řez. Navíc $w$ má souseda v každé komponentě $G \setminus \{u, w, z\}$. Tudíž znova existuje komponenta $K'$, která neobsahuje $x, y$.

Tedy platí, že v $K'$ nejsou vrcholy $x, y, z, u, w$, ale obsahuje souseda $w$. Proto je $K'$ podmnožinou $K \setminus w$. Tudíž $|K'| < |K|$ a máme spor. □

Umíme tedy jakýkoliv 3-souvislý graf kontrakcemi převést na $K_4$. Nyní ukážeme, že to jde i naopak.

**Věta 2.2** (Tutteova charakterizace 3-souvislých grafů)**.** *Graf $G$ je 3-souvislý iff existuje posposloupnost grafů $G_0, \ldots G_n$ takových, že:*

- $G_0 \cong K_4, G_n \cong G$
- $\forall 1 \leq i \leq n : G_{i-1}$ *vznikne z* $G_i$ *kontrakcí hrany*
- $\forall 0 \leq i \leq n : G_i$ *má minimální stupeň alespoň* 3

*Důkaz.*

„$\Rightarrow$“ plyne z lemmatu 2.1.

„$\Leftarrow$“ Mějme $G_0, \ldots, G_n$. Ukážeme indukcí, že $\forall i : G_i$ je 3-souvislý.

Víme, že $G_{i-1}$ je 3-souvislý a $G_i$ má minimální stupeň alespoň 3. Předpokládejme, že $G_i$ má 2-řez. Každá komponenta 2-řezu má alespoň 2 vrcholy, protože minimální stupeň je $\geq 3$. Tudíž libovolný 2-řez $G_i$ by musel existovat i v $G_{i-1}$, což je spor. □

**Definice.** Mějme $G, H$ grafy. Řekneme, že $H$ je minor $G$ (nebo $G$ obsahuje $H$ jako minor), pokud lze $H$ získat z $G$ mazáním hran, vrcholů a kontrakcí hran. Píšeme $H \preceq_m G$.

👁 Relace $\preceq_m$ je tranzitivní a reflexivní. Pokud je $H$ podgrafem $G$, je i jeho minorem. Pokud je $G$ rovinný, je rovinný i jeho minor.

**Věta 2.3.** *Nechť $H$ je graf s vrcholy $v_1, \ldots, v_k$. $H$ je minor $G$ iff $G$ obsahuje $k$ souvislých neprázdných disjunktních podgrafů $P_1, \ldots, P_k$ takových, že pokud $(v_i, v_j)$ je hrana $H$, tak v $G$ existuje hrana mezi vrcholem z $P_i$ a $P_j$.*

*Důkaz.*

„$\Leftarrow$“ Všechny vrcholy v jednotlivých podgrafech zkontrahujeme (to můžeme udělat díky souvislosti podgrafů), ostatní vrcholy mimo $P$ a nepotřebné hrany odstraníme, tím dostaneme $H$. Všechny tyto operace zachovají minoritu.

„$\Rightarrow$“ Máme minor $H$, a tím i posloupnost odstraňování a kontrakcí $G_i$, kde $G_1 = H$ a $G_n = G$. Ukážeme indukcí, že každý $G_i$ splňuje podmínku.

Pro $H$ vezmeme $P_i = v_i$. Pokud $G_{j-1}$ vznikl odstraněním, přidanou věc v $G_j$ budeme ignorovat. Pokud $G_{j-1}$ vznikl kontrakcí $(u, v)$ a vzniklý vrchol $w \in P_i$, v $G_j$ jsou vrcholy $u, v$ v $P_i$. □

**Věta 2.4** (Kuratowski, Wagner)**.** *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- *$G$ je rovinný*
- *$G$ neobsahuje dělení $K_{3,3}$ ani $K_5$*
- *$G$ neobsahuje $K_{3,3}$ ani $K_5$ jako minor*

*Důkaz.*

„$1 \Rightarrow 3$“ Plyne z toho, že $K_5$ ani $K_{3,3}$ nejsou rovinné.

„$3 \Rightarrow 2$“ Pokud má $G$ dělení $H$ jako podgraf, má jej i jako minor.

„$2 \Rightarrow 3$“ Předpokládejme, že $G$ obsahuje $K_{3,3}$ jako minor. Potom podle věty 2.3 obsahuje $G$ souvislé neprázdné disjunktní $P_1, \ldots, P_6$, kde BÚNO vedou hrany mezi každou dvojicí $P_i, P_j$, kde $i = \{1, 2, 3\}, j = \{4, 5, 6\}$.

Tudíž z každé komponenty vedou tři hrany do tří „opačných“ komponent $P_j$, označme je $q_{i,j}$. Nechť $q_{j,i} = q_{i,j}$ (pokud existují dvě takové hrany, zvolíme z obou komponent stejnou). Potom rovněž existuje v každé komponentě $P_i$ vrchol $p_i$, pro který platí, že existují tři disjunktní cesty $Q_{i,j}$ mezi vrcholem $p_i$ a hranou $q_{i,j}$.

Toto nám již dokazuje existenci dělení $K_{3,3}$, kde jeho vrcholy jsou $p_i$ a hrany jsou sjednocení cest $Q_{i,j}, q_{i,j}, Q_{j,i}$.

Pro $K_5$ postupujeme podobně, abychom získali dělení $K_5$, ale kdyby v jedné komponentě neexistoval vrchol obsahující čtyři disjunktní cesty, tak jeho komponentu rozdělíme na dvě tak, že z každé nové komponenty povedou dvě původní hrany ven. A tak získáme komponenty, které podle věty 2.3 odpovídají minoru $K_{3,3}$.

„$3 \Rightarrow 1$“ Indukcí podle počtu vrcholů.

Pokud $n \leq 4$, tvrzení triviálně platí. Tedy předpokládejme, že $n \geq 5$.

Pro každý rovinný graf $G$ a jeho vrchol $v$ existuje rovinné zakreslení $G$ s $v$ na vnější stěně.

Pokud je graf nesouvislý, můžeme použít indukční předpoklad na jeho komponenty.

Pokud má $G$ artikulaci $v$, můžeme jej podle artikulace rozdělit na dvě komponenty, ty jsou podle IP rovinné. Tudíž můžeme $G$ zakreslit rovinně, kde $v$ je na vnější stěně.

Pokud má $G$ 2-řez, můžeme jej rozdělit na dvě části podle 2-řezu z vrcholů $x, y$. Ty jsou podle IP rovinné. Nyní v každé komponentě dodáme hranu $(x, y)$, pokud neexistuje. Tím potom budeme moct tuto hranu zakreslit na vnější stěnu, grafy spojit rovinně a případně odebrat $(x, y)$.

Navíc, přidání hrany $(x, y)$ nám neporuší IP, jelikož kdyby jejím přidáním vznika v jednom podgrafu $K_5$ nebo $K_{3,3}$, už bychom našli tento minor nahrazením $(x, y)$ za zkontrahovanou cestu v druhém podgrafu.

Pokud je graf 3-souvislý, lze zkontrahovat hranu $e$ tak, že $G.e$ je 3-souvislý a neobsahuje z tranzitivity $K_{3,3}$ ani $K_5$ jako minory. Tedy z IP $G.e$ je rovinný.

Vezměme $(G.e) \setminus \{v_e\}$, tedy zkontrahovaný graf bez vrcholu vzniklého kontrakcí. Každá stěna 2-souvislého grafu je kružnice. Tudíž stěna, uvnitř které ležel $v_e$, je ohraničená kružnicí $C$. Dostáváme 3 případy podle sousedství konců $e = (x, y)$:

1. $|N(x) \cap N(y)| \geq 3$. Potom existuje $K_5$ jako minor.
2. $\exists a_1, a_2 \in N(x) \cap C, \exists b_1, b_2 \in N(y) \cap C$ v pořadí $a_1, b_1, a_2, b_2$ na $C$. Potom existuje $K_{3,3}$ jako minor.
3. Jinak všichni sousedi $y$ na $C$ leží na stejné cestě mezi dvěma sousedy $x$. Dostáváme rovinné zakreslení $G$. □

# 3 Nakreslitelnost na plochu

Každá uzavřená křivka má okolí homeomorfní otevřenému válci nebo Möbiova listu.

**Definice.** Plocha $\Gamma$ je orientovatelná, pokud je okolí každé uzavřené křivky homeomorfní válci, jinak je neorientovatelná.

Plochy vytváříme ze sféry přidáváním uch a křížítek (cross-cup).

**Fakt.** Každá plocha je homeomorfní $\Sigma_n$ nebo $\Pi_n$ pro nějaké $n$.

$\Sigma_n$ je „orientovatelná plocha rodu $n$" vzniklá ze sféry přidáváním $n$ uch, zatímco $\Pi_n$ je „neorientovatelná" a vznikla ze sféry přidáním $n$ křížítek.

**Definice.** Eulerova charakteristika plochy $\chi(\Sigma_n) = 2 - 2n$, $\chi(\Pi_n) = 2 - n$

- $\Sigma_0$ ... sféra
- $\Pi_1$ ... projektivní rovina
- $\Sigma_1$ ... torus
- $\Pi_2$ ... Kleinova láhev

**Definice.** Nakreslení grafu $G$ na plochu $\Gamma$ je zobrazení $\varphi$, které zobrazuje $x \in V(G)$ na bod $\varphi(x) \in \Gamma$ a hranu $e = (x, y) \in E(G)$ na prostou křivku na $\Gamma$ spojující $\varphi(x)$ a $\varphi(y)$.

Navíc pokud $e \neq f$, $\varphi(e) \cap \varphi(f) = \{\varphi(x) | x \in e \cap f\}$. Pokud $x \notin e$, $\varphi(x) \notin \varphi(e)$.

**Definice.** Stěna nakreslení je souvislá komponenta $\Gamma \setminus \varphi(G)$.

**Definice.** Nakreslení je buňkové, pokud je každá stěna homeomorfní disku.

**Fakt.** Nakreslení neprázdného rovinného $G$ na $\Sigma_0$ je buňkové právě, když $G$ je souvislý.

**Věta 3.1** (Zobecněná Eulerova formule)**.** *Nechť máme nakreslení $G$ na $\Gamma$, které má $s$ stěn. Pak $|V(G)| - |E(G)| + s \geq \chi(\Gamma)$. Pokud je nakreslení buňkové, platí rovnost.*

*Důkaz buňkové varianty.* Indukcí dle $n$ pro $\Sigma_n$. Pro $\Sigma_0$ platí podle Eulerovy formule.

Nyní pro $n \geq 1$ mějme nějaké ucho. To rozstřihneme a zalepíme konce disky. Tím jsme mohli rozdělit hrany tímto uchem procházející, přidáme tedy koncové vrcholy a nakreslíme kružnice mezi nimi na každé straně.

Původní graf má $v$ vrcholů, $e$ hran a $s$ stěn. Rozstřižený graf má parametry $v + 2k, e + 3k, s + k + 2$. Z IP máme, že $v + 2k - e - 3k + s + k + 2 = \chi(\Sigma_{n-1}) + 2$. Tudíž $v - e + s = \chi(\Sigma_n)$.

Nyní indukcí dle $n$ pro $\Pi_n$. Pro $\Pi_0$ platí.

Mějme křížítko, přes něj vedou nějaké hrany. Ty hrany rozpůlíme, přidáme k nim koncové vrcholy a ty spojíme kružnicí. Tím se křížítka zbavíme.

Tento nový graf má parametry $v + k, e + 2k, s + k + 1$. Tedy podle IP $v + 2k - e - 3k + s + k + 1 = \chi(\Pi_{n-1}) + 1$. Tudíž $v + e - s = \chi(\Pi_n)$. □

**Důsledek 3.2.** *$G$ nakreslitelný na $\Gamma$ s alespoň 3 vrcholy splňuje $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 3\chi(\Gamma)$. Tudíž $G$ má průměrný stupeň*

$$\frac{2|E(G)|}{|V|} \leq 6 - 6\frac{\chi(\Gamma)}{|V|}$$

*Důkaz.* BÚNO $G$ je triangulace, každá stěna je disk. Délka hranice stěny nechť je 3. Potom $2|E(G)|$ je součet délek stěn, a to je $3s$.

Ze zobecněné Eulerovy formule máme $3|E(G)| = 3(|V(G)| + s - \chi(\Gamma))$. Z toho už dosazením za $3s$ dostaneme správný vzorec.

Druhá nerovnost plyne vydělením počtu vrcholů a vynásobením dvěma. □

# 4 Barvení grafu

**Definice.** $\chi(G)$ je minimální počet barev, kterými lze dobře obarvit $G$.

$\delta(G)$ je minimální stupeň, $\Delta(G)$ je maximální stupeň vrholů $G$.

**Definice.** $G$ je $d$-degenerovaný, pokud vrcholy lze seřadit tak, že vlevo od každého vrcholu je nejvýše $d$ jeho sousedů.

👁 1 Každý graf je $\Delta(G)$-degenerovaný.

👁 2 Pro každý $d$-generovaný graf platí $\chi(G) \leq d + 1$.

**Tvrzení 4.1.** *Nechť $\Gamma \not\cong \Sigma_0$ a $G$ je nakreslitelný na $\Gamma$. Pak $G$ obsahuje alespoň jeden vrchol stupně $\leq \frac{5+\sqrt{49-24\chi(\Gamma)}}{2} = d_\Gamma$. Tedy $G$ je $d_\Gamma$-degenerovaný.*

*Důkaz.*

- $\chi(\Gamma) = 1$. Z tvrzení dostáváme existenci vrcholu stupně $\leq 5$. Průměrný stupeň $\leq 6 - \frac{6\chi(\Gamma)}{|V|} < 6$. Tudíž máme vrchol stupně 5.
- $\chi(\Gamma) = 0$. Z tvrzení máme stupeň 6 a průměrný stupeň je roven 6. Není tudíž možné, aby všechny vrcholy měly vyšší stupeň. Tvrzení platí.
- $\chi(\Gamma) < 0$. Potom $\delta < 6 - \frac{\chi(\Gamma)}{|V|}$. Taky můžeme odhadnout počet vrcholů díky $\delta \leq |V| + 1$. Dostáváme $\delta \leq 6 - \frac{6\chi(\Gamma)}{\delta+1} \to \delta^2 + \delta \leq 6(\delta + 1) - 6\chi(\Gamma)$. Řešíme kvadratickou nerovnici, po úpravách dostaneme výsledek tvrzení. □

**Důsledek 4.2** (Heawoodova formule)**.** *Pro $\Gamma \not\cong \Sigma_0$ platí, že každý graf nakreslitelný na $\Gamma$ má barevnost nejvýše $d_\Gamma + 1$.*

👁 3 $\forall G : \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Rovnost nastává pro $K_n$ a lichý cyklus. Jsou to jediné takové souvislé grafy.

**Lemma 4.3.** *Nechť $G$ je souvislý a obsahuje alespoň jeden vrchol stupně $< \Delta(G)$. Pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

*Důkaz.* Nechť $x$ je vrchol stupně $< \Delta(G)$. Zvolme kostru $T$ grafu $G$, kterou zakořeníme v $x$. Barvíme hladově od listů (máme uspořádání). Pro vrchol $v \neq x$, když jej barvíme, předchůdce $v$ není obarven, tudíž obarveno nejvýše $\Delta(G) - 1$ sousedů $v$, takže lze použít jednu z $\Delta(G)$ barev. Vrchol $x$ nakonec lze obarvit jednou $\Delta(G)$ barev, protože má stupeň $\leq \Delta(G) - 1$. □

**Věta 4.4** (Brooks)**.** *Nechť $G$ je souvislý graf, který není úplný ani lichá kružnice. Pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

*Důkaz.* Budeme předpokládat, že $\Delta \geq 3$ (Pro $\Delta = 2$ je $G$ sudý cyklus nebo cesta, $\chi(G) = 2$). Můžeme předpokládat, že ostatní vrcholy mají stupeň $\Delta(G)$, jinak můžeme použít lemma 4.3.

Předpokládejme, že $G$ je 3-souvislý. Potom lemmatu o třešničce (1.5) existují $x - -z - -y$ tak, že tvoří třešničku. Seřadíme vrcholy grafu $v_1, \ldots, v_n$ tak, že $v_1 = x, v_2 = y, v_n = z$. Každý vrchol kromě $z$ má souseda vpravo od sebe. Všimněme si, že zde využíváme 3-souvislost grafu. Kdyby $x, y$ byl řez, tak bychom toto nemohli udělat.

Sestavíme kostru, zakořeníme se v $z$ a barvíme zleva hladově. Víme, že $x, y$ mají stejnou barvu, každý vrchol má v okamžiku barvení zakázáno nejvýše $\Delta - 1$ barev.

Pokud má $G$ artikulaci $x$, potom umíme $G$ rozdělit tak, že $G_1 \cap G_2 = x, G_1 \cup G_2 = G$. Pokud máme obarvení $G_1$ a $G_2$ nejvýše $\Delta$ barvami, lze barvy zpermutovat tak, aby barva $x$ byla v obou barveních stejná.

Obarvení $G_1$ a $G_2$ existují dle lemmatu 4.3, protože $x$ má v $G_1$ i v $G_2$ stupeň menší, než $\Delta(G)$.

Pokud má $G$ 2-řez $x, y$, zkusíme jako v předchozím případě obarvit $G_1$ a $G_2$. Pokud mají $x, y$ v obou obarveních stejnou nebo různé barvy, vyhráli jsme. Může se ale stát, že jedno obarvení obarvilo $x, y$ stejně, ale druhé různě.

Pokud $x$ nebo $y$ mají v $G_1$ i $G_2$ stupeň $\geq 2$, můžeme barvit $G_1 + (x, y)$ a $G_2 + (x, y)$. Jinak BÚNO $\deg_{G_1} x, y = \Delta - 1, \deg_{G_2} x, y = 1$. Dle lemmatu 4.3 obarvíme $G_1$.

- $x, y$ dostaly různé barvy. Pak obarvíme $G_2 + (x, y)$. Po permutaci můžeme slepit.
- $x, y$ dostaly stejnou barvu. Pak obarvíme $G_2$ s vrcholy $x, y$ slepenými do jednoho vrcholu, po obarvení a permutaci můžeme slepit. □

## 4.1 Hranové barvení grafu

**Definice.** Hranové barvení grafu je funkce $b : E(G) \to B$ taková, že pokud $e \neq f$ a $e, f$ mají společný vrchol, potom $b(e) \neq b(f)$.

**Definice.** Hranová barevnost $\chi_e(G)$ je nejmenší velikost $B$, pro kterou existuje obarvení $G$.

👁 $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$.

**Definice.** Line-graf $L(G)$ grafu $G = (V, E)$ je $(E, F)$ taková, že $\{e, f\} \in F$, pokud hrany $e, f$ mají společný vrchol.

👁 $\chi_e(G) = \chi(L(G)) \leq \Delta(L(G)) + 1 \leq 2\Delta(G) - 1$, protože $\deg_{L(G)}(uv) \leq \deg u - 1 + \deg v - 1$.

**Věta 4.5** (Vizing (1964))**.** *Pro každý jednoduchý graf $G$ platí $\Delta(G) \leq \chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Je NP-úplné rozhodnout, jestli $\Delta(G)$ nebo $\Delta(G) + 1$.

*Důkaz.* To, že $\Delta(G) \leq \chi_e(G)$, už víme.

Nyní ukážeme, že $G$ lze obarvit barvami z množiny $B = [\Delta + 1]$. Nechť $H$ je maximální podgraf $G$ hranově obarvitelný hranami z $B$. Pokud $H = G$, jsme hotovi.

Jinak $\exists (x, y_0) \in E(G) - E(H)$. Barva $\alpha$ je volná v vrcholu $x$, pokud žádná hrana incidentní s $x$ nemá barvu $\alpha$.

👁 Každý vrchol má volnou barvu.

Podívejme se na vrchol $x$. Z něj vede neobarvená hrana do $y_0$. Hledejme nejdelší posloupnost $y_1, \ldots, y_k$ sousedů $x$, že $\alpha_j = b(xy_j)$ je volná u $y_{j-1}$. Nechť $\alpha$ je barva volná u $y_k$.

- $\alpha$ je volná u $x$, potom přebarvíme $(x, y_k)$ na $\alpha$ a $(x, y_{j-1})$ na $\alpha_j$ pro každé $j \in [k]$.
- $\alpha$ je použita pro hranu $(x, y')$, kde $y' \neq y_j \forall j \in [k]$. Toto je ale spor s maximalitou posloupnosti, protože lze $y'$ do posloupnosti přidat.
- $\alpha$ použitá pro hranu $(x, y_j)$, kde $j \in [1, \ldots, k-1]$. Označme $\beta$ volnou barvu u $x$, definujeme graf $H_{\alpha\beta}$ jako podgraf $H$ tvořený jenom hranami barev $\alpha, \beta$. $\Delta(H_{\alpha\beta}) \leq 2$, tedy komponenty souvislosti jsou cesty nebo kružnice.

  Nechť $P$ je komponenta $H_{\alpha\beta}$ obsahující $(x, y_j)$. $P$ je nutně cesta, kde $x$ je koncový vrchol. Druhý konec označme $z$. Nechť $b'$ je obarvení $H$ vzniklé prohozením barev $\alpha$ a $\beta$ na $P$.

  Všechny vrcholy až na $x$ a $z$ mají stejnou volnou barvu v $b'$.

  - $z = y_{j-1}$, potom $z$ měl původně volnou barvu $\alpha$. Po prohození má $x$ volnou barvu $\alpha$ a $z$ barvu $\beta$. Posloupnost $y_0, \ldots, y_k$ nebyla porušena, ale máme $\alpha$ volnou u $x$.
  - $z \neq y_{j-1}$, potom prohození barev neovlivnilo $y_{j-1}$, které má volnou barvu $\alpha$, posloupnost se zkrátí na $y_1, \ldots, y_{j-1}$.

Jak vidíme, vždy najdeme pro barvu $(x, y_0)$ jednu z $B$ barev, spor s neobarvitelností. □

Tím víme vše potřebné o hranové barevnosti grafů. Vraťme se k barevnosti vrcholové.

# 5 Perfektní grafy

$\alpha(G)$ je velikost největší nezávislé množiny, $\omega(G)$ je velikost největší kliky.

$H \leq G$ znamená, že $H$ je indukovaný podgraf $G$.

👁 $\omega(G) \leq \chi(G)$. Ostrou nerovnost splňuje lichý cyklus.

**Definice.** $G$ je perfektní, pokud $\forall H \leq G : \chi(H) = \omega(H)$.

👁 Pokud je $G$ je perfektní, každý jeho indukovaný podgraf je rovněž perfektní. Obyčejný podgraf toto splňovat nemusí, protože to může být lichý cyklus délky alespoň 5.

Příklady perfektních grafů:

- $K_n$
- bipartitní grafy

**Definice.** Nezávislá množina $I$ v grafu $G$ je rozlehlá, pokud každá klika v $G$ velikosti $\omega(G)$ obsahuje vrchol z $I$ (průnik kliky a nezávislé množiny je nejvýše jeden vrchol).

**Lemma 5.1.** *Graf $G$ je perfektní právě, když každý jeho indukovaný podgraf obsahuje rozlehlou nezávislou množinu.*

*Důkaz.*

„$\Rightarrow$“ Mějme $H \leq G$. Potom podle perfektností $G$ platí $\chi(H) = \omega(H)$. Z každé kliky velikosti $\omega(H)$ zvolme vrcholy stejné barvy. Ty tvoří nezávislou množinu, která je navíc rozlehlá.

„$\Leftarrow$“ Víme, že pro každý indukovaný podgraf $H$ máme rozlehlou množinu $I$. Každý vrchol z $I$ obarvíme barvou $\omega(H)$. Potom vezmeme graf $H - I$, který má podle předpokladu rozlehlou množinu $I'$ a zároveň $\omega(H - I)$ o 1 menší.

Tudíž můžeme postupovat stejným způsobem až po prázdný graf a nikdy nevyužijeme stejnou barvu vícekrát. Máme tedy pro každé $H$ obarvení velikosti $\omega(H)$. □

Navíc, pokud zvolíme $x \in G$ perfektním grafu, existuje rozlehlá nezávislá množina obsahující $x$ a to tak, že podle předchozího důkazu zvolíme přesně barvu $x$. Pokud $x$ je v klice velikosti $\omega(H)$, pak $x$ „zafixuje“ barvu, kterou volíme vrcholy z každé kliky velikosti $\omega(H)$. Jinak jde o vrchol mimo kliku velikosti $\omega(H)$ a existuje nesousední vrchol v této klice se stejnou barvou, tedy stále najdeme rozlehlou nezávislou množinu.

**Definice.** Nafouknutí vrcholu $x$ do kliky velikosti $r$ je vrchol $x$ nahrazený klikou s vrcholy $x_1, \ldots, x_r$ a každá hrana $(x, y)$ je nahrazená hranami $(x_i, y)$.

**Lemma 5.2.** *Pokud $G$ je perfektní, potom $\forall x, r$ $G'$ vzniklý z $G$ nafouknutím vrcholu $x$ do kliky $|r|$ je také perfektní.*

*Důkaz.* Nechť $X$ je množina vrcholů vzniklých nafouknutím $x$. Pokud $K$ je největší klika v $G'$ tak $X \subseteq K$ nebo $X \cap K = \emptyset$, ale potom je $K$ největší klika i v $G$..

Nechť $I$ je rozlehlá množina v $G$ obsahující $x$. Pro $G'$ vezmeme $I'$ tak, že za $x$ zvolíme jeden z vrcholů vzniklých nafouknutím. Pokud $X \subseteq K$, v $I'$ máme vrchol z $X$, a proto i z $K$.

Jinak protože $K$ byla největší už v $G$, už měla vrchol v $I$, tudíž má vrchol i v $I'$. Tudíž $I'$ je rozlehlá nezávislá množina. Podobně najdeme rozlehlou nezávislou množinu i v každém $H' \leq G'$.

Tudíž je i $G'$ perfektní. □

**Definice.** Doplněk grafu $G = (V, E)$ je graf $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

👁 $\omega(\bar{G}) = \alpha(G)$.

**Věta 5.3** (Slabá věta o perfektních grafech (1972, Lovász))**.** *$G$ je perfektní právě, když $\bar{G}$ je perfektní.*

*Důkaz.* Protože doplňek grafu je duální, stačí jednu implikaci.

Nechť $G$ je nejmenší perfektní graf takový, že $\bar{G}$ není perfektní.

Tudíž musí existovat $H \leq \bar{G}$, který nemá rozlehlou nezávislou množinu. Pokud $H \neq \bar{G}$, $H$ není perfektní a navíc $\bar{H} \leq G$, ale $\bar{H} \neq G$. Tedy $\bar{H}$ je perfektní. Tím dostáváme spor s minimalitou $G$.

Tedy $\bar{G}$ nemá rozlehlou nezávislou množinu, tedy pro každou nezávislou množinu $I$ v $\bar{G}$ existuje klika $Q$ velikosti $\omega(\bar{G})$ taková, že $Q \cap I = \emptyset$.

Toto tvrzení obrátíme na $G$: pro každou kliku $Q$ v $G$ existuje nezávislá množina $I$ velikosti $\alpha(G)$ disjunktní s $Q$.

Nechť $Q_1, \ldots, Q_t$ jsou všechny kliky v $G$ a $I_j$ je nezávislá množina velikosti $\alpha(G)$ disjunktní s $Q_j$ $\forall j \in [t]$.

Definujme nyní $f(x)$ jako počet množin $I_j$, které obsahují $x$, tedy $|\{j \in [t] \mid x \in I_j\}|$

Nyní provedeme trik, mějme $G^*$ jako graf vzniklý z $G$ nafouknutím každého vrcholu $x$ do kliky velikosti $f(x)$. Pokud $f(x) = 0$, vrchol $x$ smažeme. Nyní každá nezávislá množina $I_j$ si může vybrat jeden z vrcholů ze vzniklé kliky, který si nevybrala žádná jiná, tím dostaneme $I_j^*$. Všimněme si, že $I_i^* \cap I_j^* = \emptyset$ a $\bigcup_k I_k^* = V(G^*)$.

Podle lemmatu 2 je $G^*$ perfektní. Odhadneme $|V(G^*)| = \sum_{x \in V(G)} f(x) = t \cdot \alpha(G)$. Navíc $\alpha(G^*) = \alpha(G)$. Protože je $G^*$ perfektní, $\omega(G^*) = \chi(G^*)$. Největší klika v $G^*$ vznikla nafouknutím kliky $Q$ v $G$. Tedy $|Q^*| = \sum_{x \in Q} f(x) = \sum_{j=1}^{t} |Q \cap I_j| \leq t - 1$, každá nezávislá množina má nejvýše jeden vrchol z $Q$. Proto $\omega(G^*) \leq t - 1$.

Dále podle definice barevnosti víme, že $\chi(G^*) \geq \frac{|V(G^*)|}{\alpha(G^*)} = t$. Máme spor barevnosti, tedy $G^*$ není perfektní, a proto není perfektní ani $G$. $\square$

**Věta 5.4** (Silná věta o perfektních grafech (2002, Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas))**.** *G je perfektní právě, když G ani $\bar{G}$ neobsahuje lichý cyklus délky $\geq 5$ jako indukovaný podgraf.*

## 5.1 Chordální grafy

**Definice.** $G$ je chordální, pokud neobsahuje kružnici délky $\geq 4$ jako indukovaný podgraf.

Třída chordálních grafů je uzavřená na $\leq$.

**Definice.** Nechť $G$ je graf a $x, y$ nesousedící vrcholy $G$. Pak $xy$-řez v $G$ je množina $R \subseteq V(G)$ taková, že $x, y$ jsou v různých komponentách $G - R$.

Komponenty obsahující $x$ nebo $y$ budeme značit $G_x$ nebo $G_y$.

**Věta 5.5.** *G je chordální iff $\forall x, y$ nesousedící existuje $xy$-řez, který tvoří kliku.*

*Důkaz.*

„$\Leftarrow$“ Nechť $G$ není chordální, tedy obsahuje indukovanou kružnici $C$ délky $\geq 4$. Nechť $x, y$ jsou nesousední vrcholy $C$. Pak po jejich odebrání $C - \{x, y\} = P_1 \cup P_2$, kde $P_1$ a $P_2$ jsou disjunktní cesty a navíc nevedou žádné hrany mezi vrcholy $P_1$ a $P_2$.

Každý $xy$-řez obsahuje alespoň 1 vrchol z $P_1$ a $P_2$. Tyto dva vrcholy nejsou spojeny hranou, tudíž $xy$-řez není klika.

„$\Rightarrow$“ Nechť $x, y$ jsou nesousední vrcholy v chordálním grafu $G$ a $R$ je nejmenší $xy$-řez. Tvrdíme, že $R$ tvoří kliku. Pro spor předpokládejme, že ne, tedy $\exists u, v \in R$, které jsou nesousední.

Z minimality řezu víme, že $u$ i $v$ musí mít souseda v $G_x$ i v $G_y$. Existuje nejkratší cesta $P_x$ z $u$ do $v$, jejíž vnitřní vrcholy jsou v $G_x$, $P_y$ analogicky.

Sjednocením $P_x$ a $P_y$ dostaneme kružnici délky $\geq 4$, která je indukovaným podgrafem $G$, což je spor s chordalitou $G$. $\square$

**Definice.** $N_G(x)$ je množina sousedů $x$ v $G$.

Vrchol $x$ je simpliciální v $G$, pokud $N_G(x)$ tvoří kliku.

**Lemma 5.6.** *Každý (neprázdný) chordální graf G obsahuje simpliciální vrchol.*

*Důkaz.* Budeme dokazovat silnější tvrzení, že každý chordální graf je úplný, nebo obsahuje 2 nesousední simpliciální vrcholy.

Nyní budeme postupovat indukcí podle $n = |V(G)|$. Pro $n = 1$ platí.

Dále pro $n > 1$ je buď $G$ úplný, nebo $G$ obsahuje $x$ a $y$ nesousedící. Z předchozí věty víme, že existuje $xy$-řez $R$, který tvoří kliku. Mějme $G_x^* = G[G_x \cup R]$ (graf indukovaný na $G_x \cup R$), analogicky $G_y^*$.

Tyto dva grafy jsou chordální a počet jejich vrcholů je menší, než $n$. Podle IP jsou to buď kliky nebo mají dva nesousední simpliciální vrcholy. V každém případě obsahují simpliciální vrchol $s_x$ a $s_y$ mimo $R$.

👁 $N_G(s_x) = N_{G_x^*}(S_x)$, pro $s_y$ analogicky. Kdyby ne, nebyl by $R$ řez. tedy $s_x$ a $s_y$ jsou simpliciální a nesousední v $G$. $\square$

**Definice.** Perfektní eliminační schéma grafu $G$ je uspořádání vrcholů $V(G)$ $v_1, \ldots, v_n$ takové, že $\forall i \in [n]$ platí, že $N_G(v_i) \cap \{v_1, \cdots, v_{i-1}\}$ tvoří kliku.

**Věta 5.7.** *G je chordální právě, když má perfektní eliminační schéma.*

*Důkaz.* Pro implikaci zleva doprava budeme postupovat indukcí dle počtu vrcholů. Podle předchozího lemmatu má $G$ simpliciální vrchol $s$. Zvolíme $v_n = s$. Sousedi $v_n$ s indexy menšími než $n$ pak zjevně tvoří kliku. Třída chordálních grafů je uzavřená na indukovaný podgraf, a na $G \setminus s$ tedy můžeme aplikovat indukční předpoklad.

Nyní dokážeme druhou implikaci. Graf není chordální, a tedy máme indukovaný $C_k$ pro $k > 3$. Uvažujme vrchol $C_k$ který je v uspořádání vrcholů největší. Ten pak má v uspořádání vrcholů dva menší sousedy, které mezi sebou nemají hranu, a tedy se nejedná o perfektní eliminační schéma. $\square$

# 6 Tutteův polynom

**Definice.** *Multigraf* je $G = (V, E)$, kde $E$ je multimnožina prvků $\binom{V}{2}$ a $V$ (smyčky).

Které operace můžeme dělat na multigrafu?

- Odstranění hrany $e \dots G - e$
- Kontrakce hrany $e \dots G.e$

Pokud $e$ je smyčka, pak $G - e = G.e$. Hrana $e$ je most, pokud $G - e$ má více komponent, než $G$.
**Značení.**

- $K(G)$ je počet komponent $G$
- $r(E) = |V| - K(G)$ je hodnost $E$
- $n(E) = |E| - r(E)$ je nulita $E$

Mějme například prázdný graf $G(V, \emptyset)$. Potom $r(\emptyset) = 0, n(\emptyset) = 0$.

Když máme graf $G = (V, E)$ a přidáme do něj hranu $e \notin E$, potom rank buď zůstane stejný když počet komponent se nezmění, nebo se zvýší o 1. Podobně i nulita se může zvýšit o 1.

👁 $r(E)$ je velikost největší podmnožiny $E$ bez kružnice. $n(E)$ je velikost největší podmnožiny $F \subseteq E$ takové, že $K((V, E \setminus F)) = K((V, E))$, tedy jejich odstraněním se nám nezmění počet komponent.

**Definice.** Tutteův polynom multigrafu $(V, E)$ je polynom dvou proměnných $x$ a $y$ definovaný:

$$T_G(x, y) = \sum_{F \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(F)}(y-1)^{n(F)}$$

Například pro graf trojúhelník je $T(x, y) = (x-1)^{2-1}(y-1)^0 + 3((x-1)^{2-1}(y-1)^0) + 3((x-1)^{2-2}(y-1)^0 + (x-1)^{2-2}(y-1)^1 = (x-1)^2 + 3(x-1) + 3 + (y-1)$.

**Věta 6.1.** *Pro $G = (V, E)$ souvislý je $T_G(1, 1)$ roven počtu koster $G$.*

*Důkaz.* Výraz $(x-1)^{r(E)-r(F)}(y-1)^{n(F)}$ je pro $x, y = 1$ nenulový právě, když $r(E) = r(F)$ a $n(F) = 0$. V takovém případě je hodnota 1. Toto nastává právě, když $F$ je kostra grafu. □

Počítání takového polynomu přímo je však velmi otravné. Pojďme si ukázat, jak skládat polynomy z podgrafů.

**Věta 6.2.** *Nechť $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ a $|V_1 \cap V_2| \leq 1$ a $|E_1 \cap E_2| = 0$. Pro $G = (V, E)$ kde $V = V_1 \cup V_2$ a $E = E_1 \cup E_2$ máme $T_G(x, y) = T_{G_1}(x, y) \cdot T_{G_2}(x, y)$.*

*Důkaz.* Zjevně $F \subseteq E$ lze jednoznačně zapsat jako $F_1 \cup F_2$ takové, že $F_1 \subseteq E_1$ a $F_2 \subseteq E_2$. Navíc $r_G(F) = r_{G_1}(F_1) + r_{G_2}(F_2)$ a $n_G(F) = n_{G_1}(F_1) + n_{G_2}(F_2)$.
$T_G(x, y) = \sum_{F \subseteq E}(x-1)^{r(E)-r(F)}(y-1)^{n(F)}$
$= \sum_{F_1 \subseteq E_1} \sum_{F_2 \subseteq E_2}(x-1)^{r(E)-r(F_1 \cup F_2)}(y-1)^{n(F_1 \cup F_2)}$
$= \sum_{F_1 \subseteq E_1} \sum_{F_2 \subseteq E_2}(x-1)^{r_{G_1}(E_1)-r_{G_1}(F_1)+r_{G_2}(E_2)-r_{G_2}(F_2)}(y-1)^{n_{G_1}(F_1)+n_{G_2}(F_2)}$.
Tedy můžeme tyto dvě sumy rozdělit na součin dvou sum, což nám dá součin dvou polynomů. □

**Důsledek 6.3.** *Pokud $e$ je most nebo smyčka, platí $T_{G-e}(x, y) = T_{G.e}(x, y)$.*

**Věta 6.4.** *Nechť $G = (V, E)$. Pak $T_G(x, y)$ je jednoznačně určen následujícími rovnostmi:*

1. *Pokud $E = \emptyset$, pak $T_G(x, y) = 1$*
2. *Pokud $E \neq \emptyset$ a $e \in E$, pak:*
   (a) *Pokud $e$ je most, $T_G(x, y) = xT_{G-e}(x, y) = xT_{G.e}(x, y)$.*
   (b) *Pokud $e$ je smyčka, $T_G(x, y) = yT_{G-e}(x, y) = yT_{G.e}(x, y)$.*
   (c) *Jinak $T_G(x, y) = T_{G-e}(x, y) + T_{G.e}(x, y)$.*

*Důkaz.*

1. Platí zřejmě.
2. Sumu $T_G$ si rozdělíme na $S_1$ pro sčítance neobsahující $e$ a $S_2$ jej obsahující. Ukážeme:

- $e$ není most, potom $S_1 = T_{G-e}(x, y)$.
- $e$ je most, potom $S_1 = (x-1)T_{G-e}(x, y)$.
- $e$ není smyčka, potom $S_2 = T_{G.e}(x, y)$.
- $e$ je smyčka, potom $S_2 = (y-1)T_{G.e}(x, y)$.

Spojením těchto podmínek dostaneme postupně různé možnosti. □

**Definice.** Chromatický polynom multigrafu $G(V, E)$ je $ch_G(b)$ jako počet dobrých obarvení $G$ pomocí $b$ barev. Pokud $G$ má smyčku, $ch_G(b) = 0$.

**Věta 6.5.** *Pro každý multigraf* $G = (V, E)$ *platí* $ch_G(b) = (-1)^{|V|+K(G)} b^{K(G)} T_G(1-b, 0)$.

**Poznámka.** $ch_G(b)$ lze upravit na výraz $\sum_{F \subseteq E} (-1)^{|F|} b^{k(v,F)}$.

*Důkaz.* Všimněme si, že $ch_G$ zachovává rekurzivitu, speciálně je to 0, pokud má smyčku.
*Tuto část je potřeba doplnit...* □

# 7 Formální mocninné řady

**Definice.** Pro posloupnost $a_0, a_1, \ldots$ reálných čísel je *formální mocninná řada* zápis tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Množinou formálních mocninných řad budeme myslet $\mathbb{R}[\![x]\!]$.
$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, a_n = [x^n]A(x)$.

**Operace.** Mějme $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Potom:

$$A(x) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$
$$A(x)B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} (a_j + b_{n-j}) x^n$$

**Fakt.** $\mathbb{R}[\![x]\!]$ tvoří komutativní okruh. Neutrální prvek vůči sčítání je 0, neutrální prvek vůči násobení je 1.

**Definice.** Převrácená hodnota formální mocninné řady $A(x)$ je mocninná řada $B(x)$ taková, že $A(x)B(x) = 1$. Pak píšeme, že $B(x) = \frac{1}{A(x)}$ nebo $A^{-1}(x)$

- $A(x) = a_0 \ldots A^{-1}(x) = \frac{1}{a_0}$ pro $a \neq 0$
- $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \ldots A^{-1}(x) = 1 - x$.

**Věta 7.1.** *Nechť* $A(x) \in \mathbb{R}[\![x]\!]$. *Pak* $A^{-1}(x)$ *existuje právě, když* $[x^0]A(x) \neq 0$. *V takovém případě je* $A^{-1}(x)$ *jednoznačně určen.*

*Důkaz.* Hledáme $B(x)$ takové, že $A(x)B(x) = 1$, píšeme $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Podívejme se na jednotlivé členy.
$1 = a_0 b_0 \Rightarrow b_0 = \frac{1}{a_0}$
$0 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \Rightarrow b_1 = \frac{-a_1 b_0}{a_0}$
Obecně $b_n = \frac{a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{a_0}$.
Z výpočtu $b_n$ plyne, že pokud $a_0 \neq 0$, $B(x)$ existuje a je určena jednoznačně. □

$\frac{A(x)}{B(x)}$ není definované, ale používáme jako zkrácený zápis $A(x)B^{-1}(x)$, pokud $B(x)$ má inverzi.

## 7.1 Skládání řad

**Definice.** Nechť $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ jsou mocninné řady.

1. Pokud $A(x)$ je polynom (tedy od určitého $n_0$ jsou členy $a_n$ nulové), $A(B(x)) = a_0 B^0(x) + a_1 B^1(x) + \cdots + a_{n_0} B^{n_0}(x)$, tedy konečně mnoho sčítanců.
2. Pokud $b_0 = 0$, potom $A(B(x)) = a_0 B^0(x) + a_1 B^1(x) + \cdots + a_k B^k(x) + \ldots$.

👁 Pokud $b_0 = 0$, prvních $k$ koeficientů $B^k(x)$ je nula.

Druhá varianta definice je dobře definovaná, protože dle pozorování $[x^k](A(B(x))$ závisí pouze na prvních $k+2$ sčítancích.

**Definice.** Pro $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ definujeme derivaci $\frac{d}{dx} A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} x^n$.

Při derivaci se nám tedy celá řada posune vlevo.

## 7.2 Obyčejné vytvořující funkce

**Definice.** Nechť $\mathcal{A}$ je množina objektů, jejíž každý prvek $\alpha$ má definovanou velikost $|\alpha| \in \mathbb{N}_0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je v $\mathcal{A}$ konečně mnoho prvků velikosti $n$.

Označíme $\mathcal{A}_n = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid |\alpha| = n\}$ a $a_n = |\mathcal{A}_n|$.

Pak obyčejná vytvořující funkce pro $\mathcal{A}$ je formální mocninná řada $\mathrm{OVF}(\mathcal{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

👁 Pokud $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou disjunktní množiny, potom $\mathrm{OVF}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mathrm{OVF}(\mathcal{A}) + \mathrm{OVF}(\mathcal{B})$.

👁 $\mathrm{OVF}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \mathrm{OVF}(\mathcal{A}) \cdot \mathrm{OVF}(\mathcal{B})$, kde $|(\alpha, \beta)| = |\alpha| + |\beta|$.

👁 $\mathrm{OVF}(\mathcal{A}^k) = (\mathrm{OVF}(\mathcal{A}))^k$.

Mějme například *Cukrárnu*, ve které se prodávají z množiny $Z$ákusků:

- Větrník ... 30 Kč
- Kremrole ... 30 Kč
- Dort ... 40 Kč
- Zmrzlina ... 50 Kč

A z množiny $N$ápojů:

- Čaj ... 30 Kč
- Káva ... 30 Kč

Potom $\mathrm{OVF}(Z) = 2x^{30} + x^{40} + x^{50}$, $\mathrm{OVF}(N) = x^{30} + x^{40}$. Pro $M = Z \cup N$ dostáváme $\mathrm{OVF}(M) = \mathrm{OVF}(N) + \mathrm{OVF}(Z)$. Dále pak $\mathrm{OVF}(Z) \times \mathrm{OVF}(N) = \mathrm{OVF}(Z \times N) = 2x^{60} + 3x^{70} + 2x^{80} + x^{90}$.

Nyní, když si zvolíme mocninnou řadu $\frac{1}{1-\mathrm{OVF}(Z)} = 1 + \mathrm{OVF}(Z) + (\mathrm{OVF}(Z))^2 + (\mathrm{OVF}(Z))^3 + \ldots$, koeficient u $x^n$ vyjadřuje, kolika způsoby si můžeme koupit zákusky za $n$ Kč (záleží na uspořádání). To je dobře definováno pouze, pokud $[x^0]\,\mathrm{OVF}(Z) = 0$ (Jinak bychom mohli donekonečna brát první koeficient).

## 7.3 Exponenciální vytvořující funkce

**Definice.** Exponenciální vytvořující funkce $\mathrm{EVF}(\mathcal{A}) = \sum a_n \frac{x^n}{n!}$.

**Motivační příklad.** Mějme $s_n$ počet stromů na vrcholech $1, \ldots, n$. Potom $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{R}[\![x]\!]$.

Nechť $k_n$ odpovídá počtu hamiltonovských kružnic na vrcholech $1, \ldots, n$. Pak $K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \in \mathbb{R}[\![x]\!]$.

Nyní nechť $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} n! \sum_{j=0}^{n} \frac{s_j}{j!} \cdot \frac{k_{n-1}}{(n-j)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{j} s_j k_{n-j} \frac{x^n}{n!}$.

Dostali jsme počet grafů na vrcholech $1, \ldots, n$ složených ze dvou komponent souvislosti, z nichž jedna je strom a druhá je kružnice.

Když vezmeme $S^2(x)$, dostaneme uspořádané dvojice disjunktních stromů $(T_1, T_2)$ takové, že $V(T_1) \cup V(T_2) = [n]$. Neuspořádané $k$-tice získáme pomocí $\frac{S^k(x)}{k!}$.

Nyní bychom chtěli mít počet všech lesů. Uspořádané lesy odpovídají $1 + S(k) + S^2(k) + \ldots$, čímž získáme $\frac{1}{1-S(x)}$, ale pouze v případě, kdy prohlásíme, že $s_0 = 0$.

Neuspořádané lesy na vrcholech $1, \ldots, n$ ale odpovídají $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n(x)}{n!} = \exp(S(x))$.

**Definice.** Mějme $\mathcal{A}$ splňující:

1. $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ má množinu vrcholů $V(\alpha) \subseteq \mathbb{N}$, kde $V(\alpha)$ je konečná.
2. $\forall V \subseteq \mathbb{N}$ je konečně mnoho $\alpha \in \mathcal{A}$ takových, že $V(\alpha) = V$.
3. pro konečné množiny $V, W \subseteq \mathbb{N}, |V| = |W|$ platí, že počet $\alpha \in \mathcal{A}$ takových, že $V(\alpha) = V$ je stejný, jako počet $\alpha \in \mathcal{A}$ takových, že $V(\alpha) = W$.

Pak exponenciální vytvořující funkce pro $\mathcal{A}$ je $\sum a_n \frac{x^n}{n!}$ kde $a_n$ je počet prvků $\alpha \in \mathcal{A}$ splňující $V(\alpha) = \{1, \dots, n\}$.

EVF má následující vlastnosti:

- Pokud $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jsou disjunktní s $\text{EVF}(\mathcal{A}) = A(x), \text{EVF}(\mathcal{B}) = B(x)$, pak $\text{EVF}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = A(x) + B(x)$
- $A(x) \cdot B(x) = \sum c_n \frac{x^n}{n!}$, kde $c_n$ je počet uspořádaných dvojic $(\alpha, \beta)$ takových, že $V(\alpha)$ a $V(\beta)$ jsou disjunktní a jejich sjednocení je $\{1, \dots, n\}$.
- $A^k(x) = \sum d_n \frac{x^n}{n!}$, kde $d_n$ je počet $k$-tic $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, tak, že $V(\alpha_i)$ jsou po dvou disjunktní a jejich sjednocení dává $\{1, \dots, n\}$.
- $\frac{A^k(x)}{k!} = \sum e_n \frac{x^n}{n!}$, kde $e_n$ je počet $k$-tic $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, tak, že $V(\alpha_i)$ jsou po dvou disjunktní a jejich sjednocení dává $\{1, \dots, n\}$, pokud $a_0 = 0$.
- Pokud $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ platí, že $V(\alpha) \neq \emptyset$ (tedy $a_0 = 0$), pak $\exp(A(x)) = \sum f_n \frac{x^n}{n!}$, kde $f_n$ je počet množin $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ takové, že $\mathcal{A}' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ a $V(\alpha_i)$ jsou po dvou disjunktní a jejich sjednocení je $\{1, \dots, n\}$.

Uveďme si nyní příklady EVF:

- $\mathcal{A} = \{\text{množina jednoprvkových podmnožin } \mathbb{N}\}$, potom $V(\{\alpha\}) = \{\alpha\}$, tedy $\text{EVF}(\mathcal{A}) = x$.

  Z toho zjistíme EVF pro permutace: posloupnost jednoprvkových množin, tedy $\text{EVF}(\pi) = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$.

  Přímým výpočtem $\text{EVF}(\pi) = \sum n! \frac{x^n}{n!} = \sum x^n = \frac{1}{1-x}$.
- Uvažujme počet surjektivních zobrazení $[n] \to [k], n \geq k$.

  EVF($n$-prvkové množiny) $= e^x - 1$.

  Potom počet s.z. odpovídá $k$-prvkovým posloupnostem podmnožin $[n]$, které pokrývají $[n]$. Tudíž EVF $= (e^x - 1)^k$.

  Chceme nyní najít koeficient u $x^n$ pro $(e^x - 1)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j e^{(k-j)x} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \sum_{n=0}^\infty \frac{(k-j)^n x^n}{n!}$.
  Koeficient je proto $a_n = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j (k-j)^n$.
- EVF(rozklady $[n]$ na $k$ částí) $= \frac{(e^x - 1)^k}{k!}$.

  EVF(rozklady $[n]$ na neprázdné částí) $= e^{(e^x - 1)}$.

# 8 Akce grup a Burnsideovo Lemma

**Definice.** Nechť $\mathcal{A}$ je množina a $\Gamma$ je grupa s neutrálním prvkem $1_\Gamma$.
Pak akce grupy $\Gamma$ na množině $\mathcal{A}$ je operace $\cdot : \Gamma \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ taková, že:

- $\forall a \in \mathcal{A} : 1_\Gamma \cdot a = a$
- $\forall \gamma, \delta \in \Gamma \ \forall a \in \mathcal{A} : \gamma \cdot (\delta \cdot a) = (\gamma\delta) \cdot a$.

**Důsledek 8.1.** $\gamma \cdot a = b \Rightarrow \gamma^{-1} \cdot (\gamma \cdot a) = \gamma^{-1} \cdot b \Rightarrow a = \gamma^{-1} \cdot b$. *Tedy zobrazení* $\gamma \cdot$ *je bijekce.*

**Definice.** Pro $\gamma \in \Gamma$ je $a \in \mathcal{A}$ pevný bod, pokud $\gamma \cdot a = a$. $Fix(\gamma) = \{a \mid \gamma \cdot a = a\}$.
Stabilizátor prvku $a \in \mathcal{A}$ je naopak množna prvků $\gamma \in \Gamma$, které „nemění $a$“. Píšeme $Stab(a)$.

👁 $a \in Fix(\gamma) \Leftrightarrow \gamma \in Stab(a)$.

**Definice.** Nechť $\Gamma$ je grupa a $\cdot$ akce $\Gamma$ na množině $\mathcal{A}$. *Orbita prvku* $a \in \mathcal{A}$ je $[a] = \{b \in \mathcal{A} \mid \exists \gamma \in \Gamma : \gamma \cdot a = b\}$

**Definice.** Definujeme relaci $\sim$ na $\mathcal{A}$: $a \sim b$ pokud $\exists \gamma \in \Gamma : \gamma \cdot a = b$.

Relace $\sim$ je ekvivalence a orbity jsou její třídy:

- Reflexivní: $1_\Gamma \cdot a = a$
- Symetrická: $\gamma \cdot a = b$, pak $\gamma^{-1} \cdot b = a$
- Tranzitivní: $\gamma \cdot a = b$ a $\delta \cdot b = c$, pak $(\delta \cdot \gamma) \cdot a = c$

**Příklad.** Mějme koláčky $K$, které jsou rozdělené na čtyři části $a, b, c, d$, kde každá část má jednu nálpň $N$: $T$varohovou, $P$ovidlovou, nebo $M$akovou.

Triviální počty nám dají, že existuje $3^4 = 81$ různých koláčků. Ale nesmíme zapomenout na to, že tyto koláčky můžou být různě otočené. Třebá koláček s náplněmi $TMTM$ je stejný, jako koláček $MTMT$.

Zaveďme si nyní grupu $\Gamma = \{0°, 90°, 180°, 270°\}$ označující možné otočení koláčků. Naším cílem bude nyní spočítat počet orbit.

Nejprve spočtěme pevné body:

- $Fix(0°) = K$
- $Fix(90°) = Fix(270°) = \{MMMM, TTTT, PPPP\}$
- $Fix(180°) = \{abab \mid a, b \in N\}$

Nyní počítejme stabilizátory a orbity podle koláčků:

- $Stab(TPTP) = \{0°, 180°\}, [TPTP] = \{TPTP, PTPT\}$
- $Stab(MMMM) = \Gamma, [MMMM] = \{MMMM\}$
- $Stab(TPMT) = \{0°\}, [TPMT] = \{TPMT, TTPM, MTTP, PMTT\}$

Jak vidíme, velikost orbity souvisí přímo s velikostí stabilizátoru.

**Lemma 8.2.** *Nechť $\Gamma$ je konečná grupa s akcí na množině $\mathcal{A}$. Pak pro každé $a \in \mathcal{A} : |Stab(a)| \cdot |[a]| = |\Gamma|$.*

*Důkaz.* Ukažeme $|[a]| = \frac{|\Gamma|}{|Stab(a)|}$

Vezměme $b \in [a]$. Kolik existuje prvků $\gamma \in \Gamma$, pro které $\gamma \cdot a = b$? Určitě alespoň jeden, který označíme $\delta$.

Nechť $S_{ab} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot a = b\}$. Tvrdíme $|S_{ab}| = |Stab(a)|$, zkonstruujeme bijekci $\varphi : Stab(a) \to S_{ab}$ tak, že $\varphi(\gamma) = \gamma \cdot \delta$.

Vidíme, že $\varphi$ je prosté. Pokud $\delta \cdot \gamma = \delta \cdot \gamma'$, vynásobíme rovnici zleva $\delta^{-1}$ a dostáváme $\gamma = \gamma'$. Podobně ukážeme, že je i na. Pokud $\delta' \in S_{ab} : \delta' \cdot a = b$, potom $\delta \cdot (\delta^{-1} \cdot \delta')a = \delta \cdot \delta^{-1} \cdot b = b$. Tedy $\delta^{-1} \cdot \delta' \in Stab(a)$ a $\varphi(\delta^{-1} \cdot \delta') = \delta'$. □

**Věta 8.3** (Burnsideovo lemma, Cauchyho-Frobeniova formule)**.** *Nechť $\Gamma$ je konečná grupa s akcí na $\mathcal{A}$.*

1. *Pokud $\mathcal{A}$ je konečná, tak počet orbit je $|{}^{\mathcal{A}}/_{\Gamma}| = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} Fix(\gamma)$.*
2. *(Vážená verze) Nechť má každá orbita $o \in {}^{\mathcal{A}}/_{\Gamma}$ přiřazenou váhu $w(o)$. Pak*

$$\sum_{o \in {}^{\mathcal{A}}/_{\Gamma}} w(o) = \frac{1}{|\Gamma|} \cdot \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{a \in Fix(\gamma)} w([a]).$$

*Důkaz.* Stačí ukázat druhý případ, protože první případ je speciální.

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{a \in Fix(\gamma)} w([a]) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{\gamma \in Stab(a)} w([a]) = \sum_{o \in {}^{\mathcal{A}}/_{\Gamma}} \sum_{a \in o} \sum_{\gamma \in Stab(a)} w([a]) = \sum_{o \in {}^{\mathcal{A}}/_{\Gamma}} w(o) \sum_{a \in o} |Stab(a)|.$$

Nyní využijeme předchozí lemma a dostáváme

$$\sum_{o \in {}^{\mathcal{A}}/_{\Gamma}} w(o) \sum_{a \in o} \frac{\Gamma}{|o|} = \sum_{o \in {}^{\mathcal{A}}/_{\Gamma}} w(o) \cdot \frac{\Gamma}{|o|} \cdot |o| = \sum_{o \in {}^{\mathcal{A}}/_{\Gamma}} w(o) \cdot |\Gamma|.$$ □

Díky této větě už můžeme spočítat, kolik různých koláčků skutečně existuje: $\left|{}^{K}/_{\Gamma}\right| = \frac{1}{4}(81 + 3 + 9 + 3) = 24$.

Nyní uvažujme koláčky $R$ jiného druhu, speciálně s rozinkami. Tentokrát na každou část budeme dávat nezáporný počet rozinek. Tedy $R = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{N}_0\}$. Chceme spočítat počet různých koláčků, pokud máme $n$ rozinek. To nám dá mocninnou řadu $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 1 + x + 3x^2 + \dots$

Využijeme stejnou grupu $\Gamma$ jako v předchozím příkladě. Všechny koláčky v každé orbitě mají stejný počet rozinek. Za váhu orbity $o$ prohlásíme $x^n$, kde $n$ je počet rozinek v koláčcích z $o$. Potom $A(x) = \sum_{o \in {}^{R}/_{\Gamma}} w(o)$. Z vážené verze dískáváme:

$$A(x) = \frac{1}{|\Gamma|} \cdot \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{k \in Fix(\gamma)} w([k])$$

Všechny možnosti si zapíšeme do tabulky, kterou následně sečteme a vydělíme 4. Tím dostaneme výslednou vytvořující funkci:

| | $0°$ | $90°, 270°$ | $180°$ |
|---|---|---|---|
| $Fix(\gamma)$ | $R$ | $(a,a,a,a)$ | $(a,b,a,b)$ |
| $\sum w([k])$ | $\frac{1}{(1-x)^4}$ | $\frac{1}{1-x^4}$ | $\frac{1}{(1-x^2)^2}$ |

# 9 Extremální věty

**Definice.** $\mathrm{ex}(n,H)$ je největší možný počet hran v grafu na $n$ vrcholech, který neobsahuje $H$ jako podgraf.

**Definice.** Turánův graf na $n$ vrcholech s $r$ partitami, značený $T_{n,r}$ je úplný $r$-partitiní graf na $n$ vrcholech, jehož partity mají velikosti $n/r$ (zaokrouhlené nahoru nebo dolů).

Například $T_{n,2}$ je úplný bipartitní graf $K_{\lfloor n/2\rfloor,\lceil n/2\rceil}$.

Počet hran grafu $T_{n,r}$ budeme značit $t_{n,r}$.

👁 $\mathrm{ex}(n,K_{r+1}) \geq t_{n,r}$, protože $T_{n,r}$ neobsahuje $K_{r+1}$ jako podgraf.

**Lemma 9.1.** *Každý $r$-partitní graf na $n$ vrcholech má nejvýše $t_{n,r}$ hran.*

*Důkaz.* Nechť $G=(V,E)$ je $r$-partitní graf na $n$ vrcholech s co nejvíce hranami. Ukážeme, že $G \cong T_{n,r}$.

Nechť $P_1,P_2,\ldots,P_r$ jsou partity $G$ a $|P_1| \leq |P_2| \leq \cdots \leq |P_r|$. Pokud $|P_r| \leq |P_1|+1$, tak $G \cong T_{n,r}$ máme splněno.

Předpokládejme, že $|P_r| \geq |P_1|+2$. Potom ale můžeme přesunout jeden vrchol z $P_r$ do $P_1$ a doplnit hrany, čímž najdeme $G'$ o více hranách.

V $G'$ všem vrcholům $P_r$ se při přesunu zvýší stupeň alespoň o 1 a vrcholům $P_1$ sice klesne stupeň o 1, ale má stále alespoň o 1 vrchol méně. To je spor s maximalitou hran. □

**Lemma 9.2.** *Nechť $G=(V,E)$ je graf na $n$ vrcholech neobsahující $K_{r+1}$. Potom existuje úplný $r$-partitní graf $H=(V,F)$ takový, že $\forall x \in V : \deg_G(x) \leq \deg_H(x)$.*

*Důkaz.* Indukcí podle $r$. Pro $r=1$ každý graf bez $K_2$ je 1-partitní, lze vzít $G=H$.

Předpokládejme, že $r \geq 2$ a platí lemma pro grafy bez $K_r$. Nechť $G$ je graf neobsahující $K_{r+1}$, $v \in V$ je vrchol největšího stupně, $S$ je množina jeho sousedů a $G_S$ je podgraf $G$ indukovaný $S$.

$G_S$ neobsahuje $K_r$ (jinak by $G$ obsahoval $K_{r+1}$ na množině $S \cup \{v\}$). Tedy podle indukce existuje $r-1$-partitní graf $H_S=(S,F_S)$ splňující $\forall y \in S : \deg_{G_S}(y) \leq \deg_{H_S}(y)$.

Nechť $H$ je úplný $r$-partitní graf vzniklý z $H_S$ přidáním $V \setminus S$ jako $r$-tou partitu. Tvrdíme, že $\forall x \in V : \deg_G(x) \leq \deg_H(x)$. Rozlišíme dva případy:

- $x \in S$, potom $\deg_G(x) \leq \deg_{G_S}(x) + |V \setminus S| \leq \deg_{H_S}(x) + |V \setminus S| = \deg_H(x)$.
- $x \notin S$, potom $\deg_G(x) \leq \deg_G(v) = |S| = \deg_H(x)$. □

**Věta 9.3** (Turán, 1941)**.** $\mathrm{ex}(n,K_{r+1}) = t_{n,r}$.

*Důkaz.* Už víme, že $\mathrm{ex}(n,K_{r+1}) \geq t_{n,r}$. Nechť $G=(V,E)$ je graf na $n$ vrcholech bez $K_{r+1}$ s co nejvíce hranami. Podle lemmatu 9.2 existuje pro $G$ nějaký úplný $r$-partitní graf $H=(V,F)$ s $|E| \leq |F|$. Podle lemmatu 9.1 $|F| \leq t_{n,r}$.

Tedy $\mathrm{ex}(n,K_{r+1}) \leq t_{n,r}$. □

**Definice.** $k$-uniformní hypergraf je dvojice $(V,E)$, kde $E$ je množina $k$-prvkových podmnožin $V$.

$f(n,k)$ bude největší počet hyperhran v $k$-uniformním hypergrafu na $n$ vrcholech, který neobsahuje 2 disjunktní hyperhrany.

👁 Pokud $n < 2k$, tak $f(n,k) = \binom{n}{k}$.

👁 Pokud $n \geq 2k$, tak $f(n,k) \geq \binom{n-1}{k-1}$.

Označme si $\mathbb{Z}_n$ množinu $[n]$ s operací sčítání mod$n$. Interval délky $k$ je jakákoliv podmnožina $\mathbb{Z}_n$, jejíž tvar je {i,i+1,...,i+k-1}.

**Lemma 9.4.** *Nechť $I_1,I_2,\ldots,I_m$ je množina intervalů $\mathbb{Z}_n$ délky $k$ takových, že každé dva se protínají a $n \geq 2k$. Potom $m \leq k$.*

*Důkaz.* BÚNO $I_1 = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Označme $\mathcal{S} = \{I_2, \ldots, I_m\}$. Pro každé $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ mějme intevaly $J_{<i} = \{i-1, \ldots, i-k\}$ a $J_{\geq i} = \{i, i+1, \ldots, i+k-1\}$.

Každý interval z $\mathcal{S}$ je roven $J_{<i}$ nebo $J_{\geq i}$ pro nějaké $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, jinak by neprotínal $I_1$. Navíc $J_{<i} \cap J_{\geq i} = \emptyset$, protože $n \geq 2k$. Takže pro každé $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ existuje nejvýše jeden interval.

Tedy $|\mathcal{S}| \leq k-1$, tudíž $m \leq k$. □

**Věta 9.5** (Erdős-Ko-Rado,1961)**.** *Pro každé $k$ a $n$ takové, že $n \geq 2k$, platí $f(n,k) = \binom{n-1}{k-1}$.*

*Důkaz.* Nechť $G = (V, E)$ je $k$-uniformní hypergraf na $n$ vrcholech, jehož každé dvě hyperhrany se protínají, splňující $|E| = f(k, n)$.

Vezměme si náhodnou bijekci $\pi$ z $V$ na $\mathbb{Z}_n$. Nechť $X$ je počet hyperhran z $|E|$, které se pomocí $\pi$ převedou na interval. Dle lemmatu 9.4 platí $X \leq k$ pro každé $\pi$.

Navíc platí, $\mathbb{E}[X] = |E| \cdot \Pr_\pi[\pi$ zobrazí danou $k$-prvkovou množinu na interval$] = |E| \cdot n / \binom{n}{k}$. Protože $\mathbb{E}[X] \leq k$, máme $|E| \cdot n / \binom{n}{k} \leq k$, tedy $|E| \leq \frac{k}{n} \cdot \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$. □

## 9.1 Lemma o slunečnici

**Definice.** Slunečnice ($\Delta$-systém) s $k$ lístky a centrem $Y$ je systém množin $S_1, \ldots, S_k$ takový, že $S_i \cap S_j = Y \; \forall i, j \in [k], i \neq j$.

$S_i \setminus Y$ jsou lístky, požadujeme aby byly neprázdné, zatímco centrum $Y$ prázdné být může.

**Lemma 9.6** (O slunečnici; Erdős-Rado, 1960)**.** *Nechť $\mathcal{F}$ je systém $s$-prvkových množin. Pokud $|\mathcal{F}| > s!(k-1)^s$, pak $\mathcal{F}$ obsahuje slunečnici s $k$ lístky.*

*Důkaz.* Indukcí dle $s$: $s = 1$, $|\mathcal{F}| > k-1$, tudíž $\mathcal{F}$ obsahuje alespoň $k$ různých jednoprvkových množin, což je slunečnice.

Nyní nechť $S \geq 2$. Mějme $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_t\}$ maximální systém po dvou disjunktních množin v $\mathcal{F}$. Uvažujme $B = \bigcup \mathcal{A}$. Rovněž $t < k$, jinak máme slunečnici s $k$ lístky.

👁 Každá množina z $\mathcal{F} \setminus \mathcal{A}$ obsahuje prvek z $B$.

Potom $|B| \leq s \cdot (k-1)$. Budeme počítat dvěma způsoby. Z Dirichletova principu existuje $x \in B$, který je obsažen alespoň v $\frac{|\mathcal{F}|}{|B|}$ množinách $\mathcal{F}$. To je ostře víc, než $\frac{s!(k-1)^s}{s(k-1)} = (s-1)!(k-1)^{s-1}$.

Zafixujeme si takový prvek $x$ a definujeme $\mathcal{F}_x = \{S \setminus \{x\} \mid S \in \mathcal{F}, x \in S\}$. To je systém ostře víc než $(s-1)!(k-1)^{s-1}$ množin velikosti $s-1$. Ten z indukčního předpokladu obsahuje slunečnici s $k$ lístky. Když do množin slunečnice přidáme $x$, dostaneme novou slunečnici s $k$ lístky ve $\mathcal{F}$. □

Toto lemma je ale celkem staré a máme velmi vysoké číslo. Nešlo by to zlepšit?

**Domněnka** (Erdős-Rado, 1960). *$s!(k-1)^s$ jde nahradit $[C(k)]^s$.*

Co je známo:

- Existuje systém $s$-prvkových množin velikosti $(k-1)^s$ bez slunečnice s $k$ lístky. Vezměme $s$-tici disjunktních množin $A_i, \ldots, A_s$ velikosti $k-1$, ze které uděláme systém množin $S$, kde $S$ obsahuje právě 1 prvek z každého $A_i$.

# 10 Hamiltonovské grafy

Jistě jsme už dříve slyšeli o nejznámějším NP-úplným problému, a to problému obchodního cestujícího. V něm je za úkol najít kružnici obsahující všechny vrcholy takovou, že její váha je co nejmenší.

Avšak dá se ukázat, že jen nalezení této kružnice, zvané hamiltonovské, je samo o sobě NP-úplný problém. Pojďme nyní alespoň zjistit, které grafy tuto kružnici určitě obsahují nebo neobsahují.

**Definice.** Graf je hamiltonovský, pokud obsahuje hamiltonovskou kružnici, tedy kružinci procházející všemi vrcholy.

Hamiltonovská cesta je cesta procházející všemi vrcholy.

**Definice.** Bondyho-Chvátalův uzávěr grafu $cl(G)$ je graf vzniklý z $G$ postupným přidáváním hran mezi vrcholy $x$ a $y$ takové, že $\deg(x) + \deg(y) \geq |V(G)|$.

Tento uzávěr má pěkné vlastnosti vzhledem k existenci hamiltonovské kružnice, respektive nám dokazuje její existenci:

**Věta 10.1** (Bondy-Chvátal)**.** *G je hamiltonovský právě tehdy, když $cl(G)$ je hamiltonovský.*

Z této ekvivalence již získáváme důsledky:

**Důsledek 10.2** (Oreho věta)**.** *Graf s $n \geq 3$ vrcholy je hamiltonovský, pokud pro každý pár nesousedních vrcholů $x$ a $y$ platí* $\deg(x) + \deg(y) \geq n$.

**Důsledek 10.3** (Diracova věta)**.** *Graf s $n \geq 3$ vrcholy je hamiltonovský, pokud má minimální stupeň $\geq \frac{n}{2}$.*

Tento odhad je nejlepší možný, představme si dvě kliky velikosti $m$ spojené jedním vrcholem. Tento graf není hamiltonovský, má $2m-1$ vrcholů, ale minimální stupeň je $m-1$, tedy $\lfloor \frac{2m-1}{2} \rfloor$.

*Důkaz věty 10.1.* Dokážeme: $G$ je hamiltonovský právě, když $G^+ = G \cup \{xy\}$ je hamiltonovský, kde $xy$ je hrana mezi nesousedními vrcholy takovými, že $\deg_G(x) + \deg_G(y) \geq |V(G)|$. Z tohoto tvrzení již věta plyne.

„$\Rightarrow$“ Triviální, přidání hrany určitě neznemožní existenci kružnice.

„$\Leftarrow$“ Nechť $C = \{v_1 = x, \ldots, v_n = y\}$ je hamiltonovská kružnice v $G^+$. Pokud pro nějaké $i \in \{2, \ldots, n-2\}$ existují hrany $xv_{i+1}$ a $yv_i$, můžeme kružnici přesměrovat přes tyto dvě hrany a $G$ má HK.

Definujme $I_1 = \{i \in \{2, \ldots, n-2\} \mid xv_{i+1} \in E(G)\}$ a $I_2 = \{i \in \{2, \ldots, n-2\} \mid yv_i \in E(G)\}$. Pokud $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, našli jsme $i$.

$|I_1 \cup I_2| \leq n-3$. Dále $|I_1| = \deg_G(x) - 1$ a naopak $|I_2| = \deg_G(y) - 1$. Tudíž $|I_1| + |I_2| = \deg_G(x) + \deg_G(y) - 2 \geq n-2$ podle podmínky na stupně v $G$. Tudíž musí být $|I_1 \cap I_2| > 0$. □

Zatím umíme ukázat, že graf je hamiltonovský jen podle stupňů vrcholů. Ale třeba takový cyklus o $n$ vrcholech je hamiltonovský, i když minimální stupeň je 2. Proto by se měla hamiltonovskost ukázat pomocí $k$-souvislosti.

**Věta 10.4.** *Každý $k$-souvislý graf s $n \geq 3$ vrcholy a $\alpha(G) \leq k$ je hamiltonovský.*

*Důkaz.* Nechť $C = v_1, \ldots, v_m$ nejdelší kružnice v $G$. Pro spor předpokládejme, že $C$ není hamiltonovská kružnice, tedy $\exists v \in V(G) - V(c)$.

Nechť $\mathcal{F}$ je největší systém cest z $v$ do $C$ navzájem disjunktních. Potom $|\mathcal{F}| \geq \min(|C|, k)$ z Mengerovy věty. Pokud $\exists i$ takové, že $P_i, P_{i+1} \in \mathcal{F}$, vezmeme $C' = C \setminus v_i v_{i+1} \cup P_i \cup P_{i+1}$ (totéž pro $P_1$ a $P_m$). Proto rovněž $|\mathcal{F}| < |C|$.

Přemýšlejme, že existují cesty $P_i, P_j$ a hrana $v_{i+1}v_{j+1}$. Potom $c' = P_i, v_i, v_{i-1} \ldots, v_{j+1}, v_{i+1}, \ldots, v_j, P_j$, což je spor s minimalitou.

Pak $J = \{v_{i+1 \bmod m} \mid i \in I\}$ je nezávislá množina velikosti $|I|$, $|F| \geq k$, tudíž $|I| = k$. Navíc $v_{i+1}v$ není hrana (jinak by $v_{i+1}v \in \mathcal{F}$). Dále $J \cup \{v\}$ je nezávislá množina velikosti $k+1$ a $\alpha(G) > k$. □