Příklady na zápočet z přednášky Matematické programování a polyedrální kombinatorika (zima 2009/2010). Na zápočet vyřešte aspoň tři. Řešení prosím pište na počítači (nejlépe v TeXu).

1. Popište přesně, jak se zbavit předpokladů na plnou dimenzi mnohostěnu $\{x \mid Ax \leq b\}$ v elipsoidové metodě (tj. dokažte Lemma 18 v textu o elipsoidové metodě).

2. Odhadněte časovou složitost elipsoidové metody.

3. Určete objem konvexního obalu vektorů $0, e_1, e_2, \ldots, e_n$ v prostoru $R^n$ (kde $e_i$ je jednotkový vektor s 1 v $i$-té složce).

4. Nechť $R$ je matice zobrazení v prostoru $R^n$ zachovávajícího skalární součin (např. rotace). Dokažte, že $RR^T = I$.

5. Zkuste vymyslet, jak použít elipsoidovou metodu pro řešení úloh semidefinitního programovaní.

6. Nechť $\max\{cx : Ax \leq b\}$ je lineární program, jehož každá nerovnost definuje jednu facetu. Předpokládejme, že známe optimální bázické (tj. odpovídající vrcholu) řešení $x^\star$. Ukažte, jak s využitím těchto znalostí najít optimální řešení duální úlohy $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ pomocí Gaussovy eliminace.

7. Napište celočíselný lineární program (s proměnou pro každou hranu) pro problém maximální acyklické podmnožiny orientovaného grafu (tj., pro orientovaný graf $G = (V, E)$ je úkolem najit podmnožinu hran maximální velikosti takovou, že se v ní nevyskytuje orientovaný cyklus). Popište algoritmus pracující v polynomiálním času (vzhledem k velikosti grafu $G$), který veřeší lineární relaxaci uvedeného lineárního programu.