Připomeňme:

LA2 22/4/2024

GRAM-SCHMIDTOVA ORTONORMALIZACE

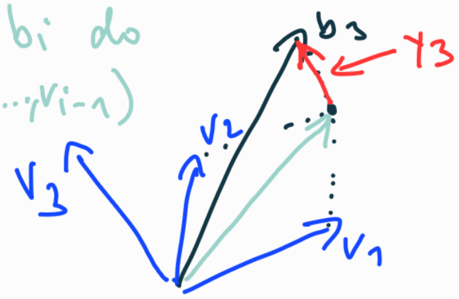
Algoritmus, který z dané báze $(b_1, \dots, b_n)$ spočítá ortonormální bázi $(v_1, \dots, v_n)$.

for $i = 1, \dots, n$ do

$$y_i := b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle b_i | v_j \rangle \cdot v_j$$

projekce b_i do $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1})$

$$v_i = \frac{y_i}{\|y_i\|}$$



Tvrzení: $(v_1, \dots, v_n)$ je ortonormální báze $\mathcal{L}(b_1, \dots, b_n)$.

Všimněme si: $\forall i$, v_i je lineární kombinací $b_1, \dots, b_i$, navíc s kladným koeficientem u b_i

$\Rightarrow$ při značení $B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ ... $Q^T Q = I$ ortogonální

dostáváme: $Q = B \cdot P$, kde P je horní trojúhelníková matice s kladnou diagonálou

Důsledek (QR dekompozice regulárních matic)

Je-li B regulární matice, pak existuje ortogonální matice Q a horní trojúhelníková matice R s kladnou diagonálou tj. $B = Q \cdot R$.

Důkaz: viz výše a vezmi $R = P^{-1}$.

Vzpomeňme: inverzní matice k horní trojúhel. s kladnou diag. je zase horní trojúhelníková s kladnou diagonalou.

$$\begin{bmatrix} + & + \\ 0 & + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & \\ 0 & \end{bmatrix} = I$$

(pro $\mathbb{C}$: místo ortogonální $\rightarrow$ tzv. unitární: $Q^H \cdot Q = I$)

Def: ortogonální doplněk $W \subseteq V$: $W^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in W, u \perp v\}$

Víme:  Je-li W podprostor a B jeho konečná báze, $W^\perp = B^\perp$.

Věta (Vlastnosti ortogonálního doplňku podprostoru)

Nechť W je podprostor VP V konečné dimenze. Pak platí:

i) $W^\perp$ je podprostor V.

ii) $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$ => $\dim(R(A)) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n$

iii) $(W^\perp)^\perp = W$

iv) $W^\perp \cap W = \{0\}$.

Důkaz: i) ověříme uzavřenost $W^\perp$ na sčítání a násobení:

- $u, v \in W^\perp$: $\forall x \in W$, $\langle u+v \mid x \rangle \overset{(L2)}{=} \underbrace{\langle u \mid x\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle v \mid x \rangle}_{=0} = 0$, protože $u, v \in W^\perp$

  $\Rightarrow u + v \in W^\perp$

- $u \in W^\perp$, $\alpha \in T$: $\forall x \in W$, $\langle \alpha u \mid x \rangle \overset{(L1)}{=} \alpha \underbrace{\langle u \mid x \rangle}_{=0} = 0 \Rightarrow \alpha u \in W^\perp$ □

ii) Nechť $B = (b_1, \dots, b_k)$ je ortonormální báze podpros. W.

Rozšíříme ji na ortonormální bázi H celého prost. V:

$H = (b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_\ell)$. ← tvrzení

Stačí nahlédnout, že $C = (c_1, \dots, c_\ell)$ je báze $W^\perp$.

Vezmi libovolné $v \in W^\perp$. Víme, že jeho souřadnice vůči H jsou dány Fourierovými koeficienty:

$\langle v \mid b_i \rangle$ pro prvních k souřadnic,

$\langle v \mid c_j \rangle$ pro posledních ℓ souřadnic.

Protože $v \in W^\perp$, $\forall b_i \in W$ platí $\langle v \mid b_i \rangle = 0$

$\Rightarrow v$ je pouze LK vektorů $c_1, \dots, c_\ell$,

tedy C je báze $W^\perp$. □

iii) Díky H, $v \in (W^\perp)^\perp$ právě když $\forall i = 1, \dots, \ell$, $\overbrace{v \perp c_i}^{\langle v \mid c_i \rangle = 0}$, což je právě když $v \in \mathcal{L}(B)$, tj. $v \in W$.

H je (orton.) báze → Four. koef.

iv) kdyby $\exists u \in W^\perp \cap W$, $u \neq 0$, tak $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_\ell$ t.ž. $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j c_j$ => H není LN - spor. □

POZITIVNĚ DEFINITNÍ MATICE

Def: Symetrická reálná matice A, $n\times n$, je
pozitivně definitní, pokud $\forall x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0$: $x^TAx > 0$.
pozitivně semidefinitní, pokud $\forall x\in\mathbb{R}^n$: $x^TAx \geq 0$.

Věta (Charakterizace pozitivně definitních matic)
Pro čtvercovou symetrickou matici A jsou následující podmínky ekvivalentní.
i) A je pozitivně definitní,
ii) všechna vlastní čísla A jsou kladná,
iii) existuje regulární matice U t.ž. $A=U^TU$,
iv) existuje regul. horní trojúhel. R s kladnou diagonálou t.ž. $A=R^TR$.

Důkaz: i) ⇒ ii)
uvaž libovolné vl. číslo λ: $Au=\lambda u$, pro vhodné u

$$0<u^TAu=u^T\lambda u=\lambda \underbrace{u^Tu}_{>0} \Rightarrow \lambda>0 \qquad \square$$

ii) ⇒ iii)
Víme: každá reálná symetrická matice je diagonalizovatelná, tj. $\exists$ ortogonální mat. B a diagonální D t.ž. $A=B^TDB$, a D má na diagonále vlastní čísla.

$\Rightarrow$ pro $U=\sqrt{D}\cdot B$, $A=U^T\cdot U$, kde $(\sqrt{D})_{ii}=\sqrt{D_{ii}}$ $\square$

iii ⇒ iv)
Víme: každá regulární matice U má tzv. QR rozklad, tj. pro U existuje ortogonální Q a horní trojú. R s kladnou diag. t.ž. $U=Q\cdot R \Rightarrow A=U^T\cdot U=R^T\underbrace{Q^T\cdot Q}_{=I}\cdot R=R^T\cdot R$. $\square$

iv) ⇒ i) $x^TAx=x^TR^T\underbrace{Rx}_{\neq 0}>0$ $\square$

Důsledek: Je-li A pozitivně definitní, pak $\det(A)>0$.
dk: víme, že det je součin vl. čísel.

Pozn. 1: obdobná tvrzení platí pro pozitivně semidefinitní.

Pozn. 2: Pozitivně definitní matice jsou dost velmi důležité v OPTIMALIZACI (např. MAX CUT)

Pozn. 3: Matice R z bodu (iv) je určena jednoznačně.
[důkaz nebyl na přednášce]

Dk: $A = R^T R = P^T P$, R, P - horní trojúh. matice

$$\underbrace{\underbrace{RP^{-1}}_{\text{obě horní }\triangle} = \underbrace{(R^T)^{-1} P^T}_{\text{obě dolní }\triangle}}$$

výsledek horní $\triangle$ dolní $\triangle$ $\Rightarrow$ diagonální

Proto: $RP^{-1} = D = \underbrace{(R^T)^{-1}P^T}$ D je symetrická

$$D^{-1} = (P^T)^{-1} \cdot R^T = RP^{-1}$$

$\Rightarrow D = D^{-1}$, tj. D má na diagonále jen ± 1.

Když $\forall i$, $D_{ii} = 1$, tak $D = I$, tedy $R = P \cdot D = P$ OK

Když $\exists i$ t.ž. $D_{ii} = -1$, tak $R_{ii} = -P_{ii}$ - spor s tím, že obě matice P a D mají kladnou diag. ∎

Příklad: pro bázi $(b_1, \dots, b_n)$ VP V se skalárním součinem (nad $\mathbb{R}$), Gramova matice $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je dána předpisem
$$G_{ij} = \langle b_i | b_j \rangle.$$

Platí: G je pozitivně definitní.

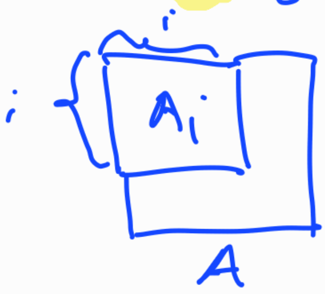
Dk: $x^T G x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} G_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle b_i | b_j \rangle x_i x_j$
$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle x_i b_i | x_j b_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i b_i | \sum_{j=1}^{n} x_j b_j \rangle = \langle \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i b_i}_{\neq 0} | \underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j b_j}_{\neq 0} \rangle > 0.$

Platí: Je-li A pozitivně definitní matice, pak $\langle x | y \rangle = x^T A y$ je skalární součin. (tj. i obráceně)

Smysl: těsná souvislost mezi skal. souč. a posit. def. maticemi.

TESTOVÁNÍ POZITIVNÍ DEFINITNOSTI

Věta (Sylvestrova podmínka).
Symetrická matice A, $n \times n$, je pozitivně definitní, právě když pro každé $i = 1, \dots, n$, $\det A_i > 0$, kde A_i je podmatice A z prvních i řádků a sloupců.



Důkaz $\Rightarrow$ všimni si: $\forall i, \forall x \in \mathbb{R}^i, x^T A_i x > 0$
(protože dle předpokladu pro $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $0 < \bar{x}^T A \bar{x} = x^T A_i x$)

$\Rightarrow \forall i$, A_i je pozitivně definitní podle definice. $\square$

$\Leftarrow$ příště