Připomeňme:

Definice: Nechť V je VP nad $\mathbb{C}$. Zobrazení $V \times V \to \mathbb{C}$, které dvojici x, y přiřazuje číslo $\langle x|y\rangle$, se nazývá **skalární součin**, pokud splňuje následující axiomy:

linearita:
- (L1) $\forall x,y \in V,\ \forall \alpha \in \mathbb{C}: \langle \alpha x|y\rangle = \alpha\langle x|y\rangle$
- (L2) $\forall x,y,z \in V: \quad \langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$

pozitivita → (P) $\forall x \in V: \quad \langle x|x\rangle \geq 0$ a $\langle x|x\rangle = 0$ pouze pro $x=0$

komut. → (K) $\forall x,y \in V: \quad \langle x|y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

Norma odvozená ze skalárního součinu: zobrazení přiřazující vektoru x číslo $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$. Př.: $\sqrt{\sum x_i^2}$

Definice: Vektory x, y ve VP V se skalárním součinem se nazývají **kolmé**, pokud $\langle x|y\rangle = 0$. Značíme: $x \perp y$.

Pythagorova věta: Pokud $x, y \in V$ jsou kolmé, pak $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Důkaz: $\|x+y\|^2 = \langle x+y|x+y\rangle = \langle x|x\rangle + \underbrace{\langle x|y\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y|x\rangle}_{=0} + \langle y|y\rangle =$
$= \|x\|^2 + \|y\|^2.$ $\square$

Každý systém nenulových, vzájemně kolmých vektorů je lineárně nezávislý.

Definice: Báze $B = (v_1, \dots, v_n)$ VP V se skalár. součinem je **ortonormální**, pokud
- $\forall i \neq j,\ v_i \perp v_j$
- $\forall i,\ \|v_i\| = 1.$

Tvrzení: Nechť $(v_1, \dots, v_n)$ je ortonormální báze VP V a $x \in V$. Pak platí:

$$x = \langle x|v_1\rangle v_1 + \langle x|v_2\rangle v_2 + \dots + \langle x|v_n\rangle v_n .$$

Smysl: je snadné získat souřadnice vektoru vůči ort. bázi.

Důkaz: nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou koeficienty tž. $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

Pak $\forall j$: $\langle x|v_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \,\middle|\, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i|v_j\rangle = \alpha_j$ ■

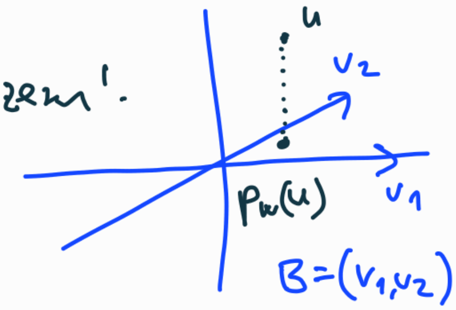
Koeficienty $\langle x|v_j\rangle$ ... tzv. Fourierovy koeficienty vektoru x

Definice: Nechť W je podprostor VP V se skal. součinem a $B = (v_1, \dots, v_n)$ je ortonormální báze VP W.
Pak zobrazení $p_W : V \to W$ definované předpisem

$$p_W(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u|v_i\rangle \cdot v_i$$

se nazývá ortogonální projekce V na W.

DÚ: Ověřte, že p_W je lineární zobrazení.



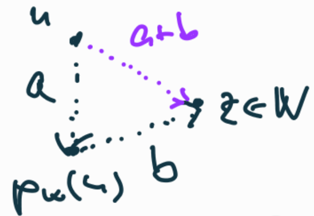
$\forall j = 1, \dots, n$: $(u - p_W(u)) \perp v_j$

Dk: $\langle u - p_W(u) | v_j\rangle = \left\langle u - \sum_{i=1}^{n} \langle u|v_i\rangle v_i \,\middle|\, v_j \right\rangle \overset{L1, L2}{=}$

$$\langle u|v_j\rangle - \sum_{i=1}^{n} \left(\langle u|v_i\rangle \underbrace{\langle v_i|v_j\rangle}_{\substack{=1 \text{ pro } i=j, \\ \text{jinak } 0}} \right) = \langle u|v_j\rangle - \langle u|v_j\rangle = 0$$ ■

Tvrzení: Vektor $p_W(u)$ je vektor z W, který je nejbližší k vektoru u (tj. $\forall z \in W, z \neq p_W(u)$: $\|u - p_W(u)\| < \|u - z\|$).

Důkaz: uvažme libovolné $z \in W$, $z \neq p_W(u)$, a trojúhelník $u, z, p_W(u)$



označme $a = p_W(u) - u$, $b = z - p_W(u)$, $b \neq 0$

Dle : $a \perp b \in \mathcal{L}(b_1, \dots, b_n)$

$\Rightarrow$ Dle Pythagorovy věty: $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \overbrace{\|b\|^2}^{>0} > \|a\|^2$ ■

Důsledek: Zobrazení p_W nezávisí na volbě báze B.

Klíčové otázky: existují vůbec ortonormální báze?
pokud ano, jak je najít?

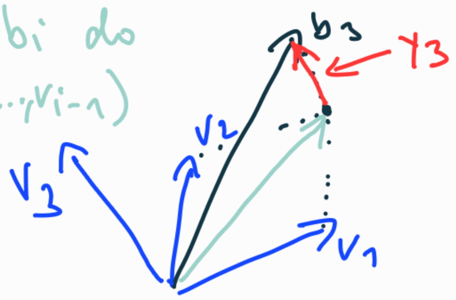
GRAM-SCHMIDTOVA ORTONORMALIZACE

Algoritmus, který z dané báze $(b_1, \dots, b_n)$ spočítá ortonormální bázi $(v_1, \dots, v_n)$.

for $i = 1, \dots, n$ do

$$y_i := b_i - \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} \langle b_i | v_j \rangle \cdot v_j}_{\text{projekce } b_i \text{ do } \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1})}$$

$$v_i = \frac{y_i}{\|y_i\|}$$



Tvrzení: $(v_1, \dots, v_n)$ je ortonormální báze $\mathcal{L}(b_1, \dots, b_n)$.

Důkaz: indukcí nahlédneme:

$\forall i: (v_1, \dots, v_i)$ je ortonormální báze $\mathcal{L}(b_1, \dots, b_i)$.

$i = 1$ jistě $\|v_1\| = \frac{\|y_1\|}{\|y_1\|} = 1$, násobek b_1.

$i-1 \to i$: $(v_1, \dots, v_{i-1})$ je dle ind. předp. orton. báze $\mathcal{L}(b_1, \dots, b_{i-1})$

- jistě $y_i \neq 0$ – jinak by $b_1, \dots, b_i$ byly LZ
  $\Rightarrow \|v_i\| = \left\| \frac{y_i}{\|y_i\|} \right\| = 1$ ← linearita normy
- $y_i \perp v_j$ $\forall j = 1, \dots, i-1$ dle , tedy též $v_i \perp v_j$
- dle lemmatu o výměně: $\underbrace{\mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1}, b_i)}_{= \mathcal{L}(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i)} = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i)$ ■

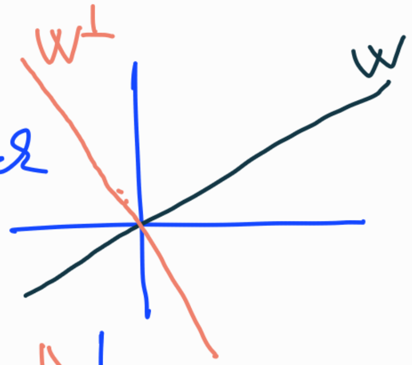
Důsledek: Je-li W podprostor VP V se skalár. součinem konečné dimenze, pak lze každou ortonormální bázi W rozšířit na ortonormální bázi V. (uvaž $W=\{\emptyset\}$)

dk: nejprve doplň danou ortonor. bázi W na bázi celého V - dle Steinitzovy věty, a pak použij G-SCH. ortonormalizaci (na vektorech báze V nebude nic měnit). ■

Definice: Nechť W je množina vektorů na VP V (se SS). Pak ortogonální doplněk W je množina

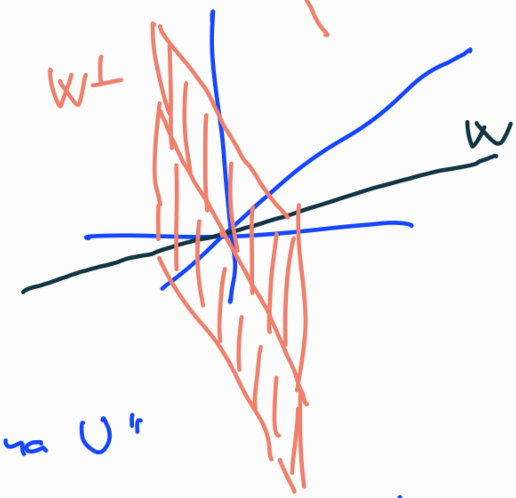
$$W^\perp = \{v\in V : \forall u\in W,\ u\perp v\}.$$

... tj. $\langle u|v\rangle = 0$



Příklad: • $V=\mathbb{R}^2$, W ... přímka skrz počátek

$W^\perp$ ... přímka kolmá na W, skrz počátek



• $V=\mathbb{R}^3$, W ... přímka skrz počátek

$W^\perp$ ... rovina kolmá na W skrz počátek

$U\subseteq V \Rightarrow V^\perp \subseteq U^\perp$

dk: jasné - "vše kolmé na V je kolmé i na U"

$x\in V^\perp \Leftrightarrow \forall v\in V,\ x\perp v \Rightarrow \forall v\in U,\ x\perp v \Leftrightarrow x\in U^\perp$ ■

• Uvaž soustavu $Ax=0$.

$\supseteq \leftarrow$ důkaz

$\ker(A) = \{x \mid Ax=0\} = R(A)^\perp$

$\subseteq$ ..... každý $v\in R(A)$ je LK řádků A.

Je-li $B=(b_1,\dots,b_n)$ báze podprostoru W, pak $v\in W^\perp \Leftrightarrow \forall i=1,\dots,n,\ v\perp b_i$.

dk: $\Rightarrow$ jasné. $\Leftarrow$ chci ověřit, že $\forall u\in W$, $\langle u|v\rangle=0$

$u=\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$, pro vhodná α_i: $\langle u|v\rangle = \langle \sum_i \alpha_i b_i|v\rangle = \sum_i \alpha_i \overbrace{\langle b_i|v\rangle}^{=0} = 0$.

Věta (Vlastnosti ortogonálního doplňku podprostoru)

Nechť W je podprostor VP V konečné dimenze. Pak platí:

i) $W^\perp$ je podprostor V.

ii) $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$

iii) $(W^\perp)^\perp = W$

iv) $W^\perp \cap W = \{\emptyset\}$.

Důkaz: i) ověříme uzavřenost $W^\perp$ na sčítání a násobení:

- $u, v \in W^\perp$: $\forall x \in W$, $\langle u+v | x\rangle = \underbrace{\langle u|x\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle v|x\rangle}_{=0} = 0$,

$\Rightarrow u+v \in W^\perp$ protože $u, v \in W^\perp$

- $u \in W^\perp$, $\alpha \in T$: $\forall x \in W$, $\langle \alpha u | x\rangle = \alpha \underbrace{\langle u|x\rangle}_{=0} = 0 \Rightarrow \alpha u \in W^\perp$ $\square$

ii) Nechť $B = (b_1, \ldots, b_k)$ je ortonormální báze podpros. W.

Rozšíříme ji na ortonormální bázi H celého prost. V:

$H = (b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_\ell)$.

Stačí nahlédnout, že $C = (c_1, \ldots, c_\ell)$ je báze $W^\perp$.

Vezmi libovolné $v \in W^\perp$. Víme, že jeho souřadnice

vůči H jsou dány Fourierovými koeficienty -

$\overbrace{\langle v | b_i\rangle}^{=0}$ pro první k souřadnic,

$\langle v | c_j\rangle$ pro posledních ℓ souřadnic.

Protože $v \in W^\perp$, $\forall \overset{\in W}{b_i}$ platí $\langle v | b_i\rangle = 0$

$\Rightarrow v$ je pouze LK vektorů $c_1, \ldots, c_\ell$,

tedy C je báze $W^\perp$. $\square$

iii) Díky H, $v \in (W^\perp)^\perp$ právě když $\forall i = 1, \ldots, \ell$, $\overbrace{v \perp c_i}^{\langle v|c_i\rangle = 0}$, což

H je (orton.) báze $\rightarrow$ je právě když $v \in \mathcal{L}(B)$, tj. $v \in W$.

Four. koef.

iv) kdyby $\exists u \in W^\perp \cap W$, $u \neq \emptyset$, tak $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_\ell$ t.ž.

$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j c_j \Rightarrow H$ není LN - spor. $\square$