SKALÁRNÍ SOUČIN

Známe euklidovský prostor

- body, vektory: n-tice z $\mathbb{R}^n$ + délka, úhel
- standardní skalární součin vektorů: $\langle x|y\rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = x^T y$
- délka vektoru x: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ (tzv. norma)
- úhel dvou vektorů x, y: $\cos\varphi = \dfrac{\langle x|y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$

Všimneme si:

- pojmy délka, úhel odvozeny ze sk. součinu
- pokud fixujeme vektor y, pak $\langle \dots | y\rangle$ (sk. součin s y) je lineární zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ možný pohled na $\langle x, y\rangle$

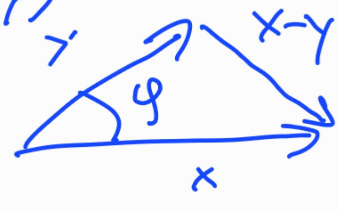
váza …. (statický) vektor, se kterým se něco dělá ….. vektor (matice), který něco dělá …. lineární forma

role jsou symetrické, pohledy lze prohodit

- $\langle x-y | x-y\rangle = \langle x|x\rangle - 2\langle x|y\rangle + \langle y|y\rangle$

tj. $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\varphi$

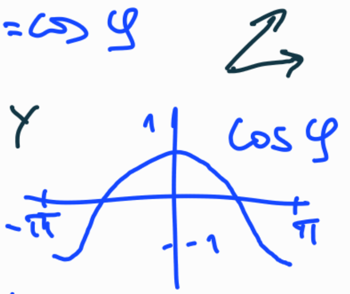
kosinová věta



- pro jednotkové vektory x, y: $\langle x, y\rangle = \cos\varphi$

určitá míra podobnosti x a y

užití při analýze dat



Zavedeme obecný pojem skalárního součinu ve vektorových prostorech

Definice: Nechť V je VP nad $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$). Pak zobrazení $V\times V \to \mathbb{R}$ (nebo $\to \mathbb{C}$), které dvojici vektorů x,y přiřazuje číslo $\langle x|y\rangle$, se nazývá **skalární součin**, pokud splňuje následující axiomy:

linearita
- (L1) $\forall x,y\in V,\ \forall \alpha\in\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$): $\langle \alpha x|y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$
- (L2) $\forall x,y,z\in V$: $\langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$

pozitivita
- (P) $\forall x\in V$: $\langle x|x\rangle \geq 0$ a $\langle x|x\rangle = 0$ pouze pro $x=0$

komut.
- (K) $\forall x,y\in V$: $\langle x|y\rangle = \underbrace{\overline{\langle y,x\rangle}}_{\text{komplexně sdružené č. k } \langle y|x\rangle}$ (tj. $\langle x|y\rangle = \langle y,x\rangle$ pro $\mathbb{R}$)

Všimneme si:

- (K) implikuje: $\langle x|x\rangle = \overline{\langle x|x\rangle}$, $\forall x\in V$ nad $\mathbb{C}$,
  tj. $\langle x|x\rangle \in \mathbb{R}$!
- $\forall x,y,z\in V$
  $\langle x|y+z\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle$ (díky (K), (L1), (K))
- $\forall x,y\in V,\ \forall\alpha\in\mathbb{C}$
  $\langle x|\alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x|y\rangle$
- $\forall x\in V$: $\langle x|0\rangle = 0$
  $\langle x|0\cdot x\rangle = 0\cdot\langle x|x\rangle$

Příklady:

- $\mathbb{R}^2$: $\langle x|y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ — ověřte si axiomy
- pro regulární matici A: $\langle x|y\rangle = x^TA^TAy$
- standardní skal. součin na $\mathbb{C}^n$:
  $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i = y^H\cdot x$ — hermitovská transpozice
- **NEPŘÍKLAD**: $\langle x|y\rangle = x^Ty$ v $\mathbb{C}^n$ není sk. součin!
  (nezápornost neplatí)

Definice: Nechť V je VP nad $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$). Zobrazení $V \to \mathbb{R}$ (vždy do $\mathbb{R}$!), které vektoru x přiřazuje číslo $\|x\|$ se nazývá **norma**, pokud splňuje následující axiomy:

(P) $\forall x \in V: \ \|x\| \geq 0$ a $\|x\| = 0$ pouze pro $x = 0$

(L) $\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) $: \ \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

(TN) $\forall x, y \in V: \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

DÚ: ověřte pro $\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$ – euklidovská norma

Norma odvozená ze skalárního součinu: zobrazení přiřazující vektoru x číslo $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$. Př.: $\sqrt{\sum x_i^2}$

Věta (Cauchy-Schwarzova nerovnost). Je-li V VP nad $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$), a $\|x\|$ je norma odvozená ze sk. s., pak $\forall x, y \in V: \ |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Důkaz: pro $\mathbb{R}$: pokud $y = 0$, jasné. Předp. $y \neq 0$.

Uvažme kvadratický mnohočlen $p(t) = \underbrace{\langle x + t \cdot y \,|\, x + t \cdot y \rangle}_{\text{axiom (P)}: \ \geq 0} \overset{L1, L2}{=}$

$$= \underbrace{\langle x | x \rangle}_{\|x\|^2} + 2 \langle x | y \rangle \cdot t + \underbrace{\langle y | y \rangle}_{\|y\|^2} \cdot t^2$$

$\Rightarrow$ diskriminant musí být nekladný

$$4 \langle x | y \rangle^2 - 4 \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0 \Rightarrow |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \ \blacksquare$$

pro $\mathbb{C}$: předp. $y \neq 0$. zvolíme $t = -\dfrac{\langle x | y \rangle}{\|y\|^2}$. Pak

$$p(t) = \|x\|^2 - \frac{\langle x | y \rangle}{\|y\|^2} \langle y | x \rangle \underbrace{- \frac{\overline{\langle x | y \rangle}}{\|y\|^2} \langle x | y \rangle + \frac{\langle x | y \rangle \overline{\langle x | y \rangle}}{\|y\|^4} \langle y | y \rangle}_{=0}$$

$$= \|x\|^2 - \frac{\langle x | y \rangle \overline{\langle x | y \rangle}}{\|y\|^2} = \|x\|^2 - \frac{|\langle x | y \rangle|^2}{\|y\|^2} \geq 0 \ \blacksquare$$

připomeňme: $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Důsledek 1: Ve VP V nad $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) je norma odvozená ze skalárního součinu normou.

Dk: axiomy (P), (L) jasné

(TN): $\|x+y\| = \sqrt{\langle x+y \mid x+y\rangle} = \sqrt{\langle x \mid x\rangle + \underbrace{\langle x \mid y\rangle + \langle y \mid x\rangle}_{\leq 2|\langle x \mid y\rangle|} + \langle y \mid y\rangle}$

Cauchy-Schwarz

$$\leq \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2} = \|x\| + \|y\|.$$

∎

Důsledek 2 (aritmetický a kvadratický průměr)

Nechť $x \in \mathbb{R}^n$. Pak

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Dk: vezmi $y = (1, \ldots, 1)^T$.

Pak $\langle x \mid y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i$ $\quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ $\quad \|y\| = \sqrt{n}$

Cauchy-Schwarz: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \Big/ :n$

$$\frac{1}{n} \sum x_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum x_i^2}$$

∎

KOLMOST

Definice: Vektory x, y ve VP V se skalárním souč. se nazývají **kolmé**, pokud $\langle x | y \rangle = 0$. Značíme: $x \perp y$.

⚠ každý systém nenulových, navzájem kolmých vektorů je lineárně nezávislý.

dk: mame $v_1, \dots, v_k$, $\forall i \neq j$ $v_i \perp v_j$.
Sporem: Předp. ži jsou lin. závislé, bůno: $v_1 = \sum_{i=2}^{k} \alpha_i v_i$.

$$\text{Pak } \langle v_1 | v_1 \rangle = \left\langle \sum_{i=2}^{k} \alpha_i v_i \,\middle|\, v_1 \right\rangle \overset{L1,L2}{=} \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \underbrace{\langle v_i | v_1 \rangle}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow v_1 = 0$ - spor. ∎

Definice: Báze $B = (v_1, \dots, v_n)$ VP V se skalár. součinem je **ortonormální**, pokud
- $\forall i \neq j$, $v_i \perp v_j$
- $\forall i$, $\|v_i\| = 1$.

Tvrzení: Nechť $(v_1, \dots, v_n)$ je ortonormální báze VP V a $x \in V$. Pak platí:

$$x = \langle x | v_1 \rangle \underline{v_1} + \langle x | v_2 \rangle \underline{v_2} + \dots + \langle x | v_n \rangle \underline{v_n}.$$

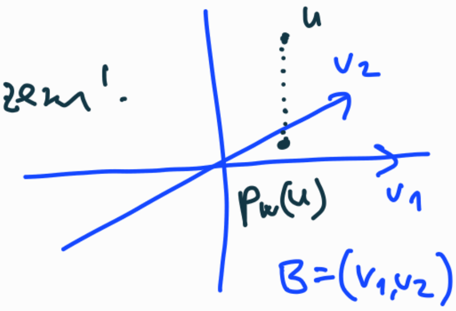
Smysl: je snadné získat souřadnice vektoru vůči ort. bázi.

Důkaz: nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou koeficienty t.ž. $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

Pak $\forall j$: $\underline{\langle x | v_j \rangle} = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \,\middle|\, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i | v_j \rangle = \underline{\alpha_j}$ ∎

Koeficienty $\langle x | v_j \rangle$ ... tzv. **Fourierovy koeficienty** vektoru x

Definice: Nechť W je <u>podprostor</u> VP V se skal. součinem a $B = (v_1, \dots, v_n)$ je ortonormální báze VP W.
Pak zobrazení $p_W : V \to W$ definované předpisem
$$p_W(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u | v_i \rangle \cdot v_i$$
se nazývá **ortogonální projekce** V na W.



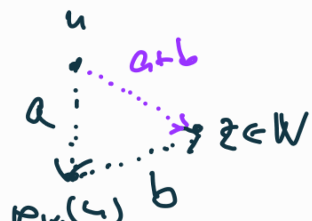
$B = (v_1, v_2)$

DÚ: Ověřte, že p_W je lineární zobrazení.

💡 $\forall j = 1, \dots, n : \ (u - p_W(u)) \perp v_j$

<u>Dk</u>: $$\langle u - p_W(u) | v_j \rangle = \langle u - \sum_{i=1}^{n} \langle u | v_i \rangle v_i | v_j \rangle \overset{L1, L2}{=}$$
$$\langle u | v_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \left(\langle u | v_i \rangle \underbrace{\langle v_i | v_j \rangle}_{\substack{= 1 \text{ pro } i = j, \\ \text{jinak } 0}} \right) = \langle u | v_j \rangle - \langle u | v_j \rangle = 0 \quad \blacksquare$$

Tvrzení: Vektor $p_W(u)$ je vektor z W, který je nejbližší k vektoru u
(tj. $\forall z \in W, z \neq u : \| u - p_W(u) \| < \| u - z \|$).



<u>Důkaz</u>: uvažme libovolné $z \in W$
a trojúhelník $u, z, p_W(u)$

označme $a = p_W(u) - u$, $b = z - p_W(u)$.

chceme: $\|a\| \overset{?}{<} \|a + b\|$ Dle 💡: $a \perp b$

$$\|a+b\|^2 = \langle a+b | a+b \rangle = \langle a|a \rangle + \overbrace{\langle a|b \rangle}^{=0} + \overbrace{\langle b|a \rangle}^{=0} + \underbrace{\langle b|b \rangle}_{>0} =$$
$$= \|a\|^2 + \|b\|^2 > \|a\|^2 \quad \blacksquare$$

Důsledek: Zobrazení p_W nezávisí na volbě báze B.