DIAGONALIZACE SYMETRICKÝCH MATIC

LA2, $\boxed{25/3/2024}$

Už víme: každá $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je podobná nějaké horní trojúhelníkové

Ukážeme: každá symetrická $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je diagonalizovatelná!

Důležité pojmy:

komplexní číslo: $z = a+bi$, kde $i = \sqrt{-1}$, $a,b \in \mathbb{R}$

Def. komplexně sdružené číslo k $z = a+bi$ je č. $\bar{z} = a-bi$.

💡 $\overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{ac-bd+i(ad+bc)} = ac-bd-i(ad+bc) = (a-bi)(c-di)$

neboli: $\overline{p\cdot z} = \overline{p}\cdot\overline{z}$

Def. Hermitovská transpozice matice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ je matice $A^H \in \mathbb{C}^{n\times m}$, kde $(A^H)_{ij} = \overline{A_{ji}}$

Jde o zobecnění transpozice reálných matic: pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A^H = A^T$.

Př: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ -2i & 3+i \end{pmatrix}$, $A^H = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ 1-i & 3-i \end{pmatrix}$

Def. Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je hermitovská, pokud $A = A^H$.

Př: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$ je hermitovská: $B = B^H$.

💡1 Je-li $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitovská, pak $\forall i$, $A_{ii} \in \mathbb{R}$.

dk: $\forall i$ platí: $A_{ii} = A^H_{ii} = \overline{A_{ii}} \Rightarrow A_{ii} \in \mathbb{R}$. ☒

Platí: $(AB)^H = B^H A^H$. Důkaz - podobný jako u transpozice

$$((AB)^H)_{ij} \overset{?}{=} (B^H A^H)_{ij}$$

Věta: každá hermitovská matice A má všechna vl. čísla reálná, a

Důkaz: všimni si: $\forall v \in \mathbb{C}^n$: $v^H v$ je reálné.

pro vl. č. λ a jeho vl. vektor v uvaž:

$$\in\mathbb{R} \longleftarrow \underbrace{(v^H A v)^H}_{z^H} = v^H A^H v = \underbrace{v^H A v}_{z} = v^H \lambda v = \lambda \boxed{v^H v} \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}!$$

$z^H = z$

☒

Věta (o diagonizovatelnosti symetrických matic, spektrální rozklad)

Každá symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je diagonizovatelná.

Pozn. platí obecněji i pro hermitovské matice

Pomocné tvrzení (o ortonormální bázi):

ke každému $v \in \mathbb{R}^n$ tž. $v^T v = 1$ existují vektory
$v_1 = v, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ tž. $\forall i : v_i^T v_i = 1$
$\forall i \neq j : v_i^T v_j = 0$.

bez důkazu - bude časem.

tzv. ortogonální matice

Všimneme si: pro $R = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ platí: $R^T \cdot R = I$, tj. $R^T = R^{-1}$.

Pozn. Následující důkaz je obdobný důkazu podobnosti každé $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ s nějakou horní trojúhelníkovou maticí!

Důkaz věty: indukcí. Pro $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ jasné.

Indukční krok : $n-1 \longrightarrow n$

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická matice.

Uvažme libovolné vlastní číslo λ - víme, že $\in \mathbb{R}$,

a odpovídající vlastní vektor $v \in \mathbb{R}^n$.

Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že $v^T v = 1$

(jinak bychom místo v vzali $\frac{v}{\sqrt{v^T v}}$)

Nechť $v_1 = v, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ je nějaká ortonormální báze $\mathbb{R}^n$ - jistě existuje dle předešlého tvrzení

a nechť $R = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$.

nemusí být diagonální

Pak existuje $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tž. $A \cdot R = R \cdot D$,

tj. $D = R^{-1} A R$
$A = R D R^{-1}$

kde $D = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & z \\ \hline 0 & \\ \vdots & \bar{D} \\ 0 & \end{array}\right]$

$\leftarrow$ symetrická! $\Rightarrow z = 0$
$\Rightarrow \bar{D}^T = \bar{D}$

Všimneme si : $D^T = (R^T A R)^T = (R^T A^T R) = R^T A R = D$

Podle indukčního předpokladu existuje matice $\bar{C} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ tj. $\bar{T} = \bar{C}^{-1} \cdot \bar{D} \cdot \bar{C}$ je diagonální.

Nechť
$$T = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \bar{T} \\ 0 & \end{array}\right], \quad C = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \bar{C} \\ 0 & \end{array}\right] \Rightarrow C^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \bar{C}^{-1} \\ 0 & \end{array}\right].$$

Pak
$$D = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \bar{D} \\ 0 & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \bar{C} \\ 0 & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \bar{T} \\ 0 & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \bar{C}^{-1} \\ 0 & \end{array}\right].$$

$$\Rightarrow A = RDR^{-1} = \underbrace{RC}_{=P}\overbrace{T}^{}\underbrace{C^{-1}R^{-1}}_{=P^{-1}} = P \cdot \overset{\text{diagonální!}}{T} \cdot P^{-1} \qquad \boxtimes$$

$\overbrace{CTC^{-1}}^{=D}$

Poznámka: ještě si všimneme:

i) pokud matice $\bar{C}$ splňuje $\bar{C}^T\bar{C} = I$,

pak také
$$C^T \cdot C = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 - 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \bar{C}^T \\ 0 & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \bar{C} \\ 0 & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \bar{C}^T\bar{C} \end{array}\right] = I$$

pro matici $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ můžeme vzít $A = \underset{\text{ortogonální}}{I} \cdot \overset{\text{diagon.}}{A} \cdot \underset{\text{ortogonální}}{I}$

ii) ☺ Jsou-li R a C obě ortogonální! pak
$$(R \cdot C)^T \cdot (RC) = C^T R^T R C = I,$$
tj. $P = RC$ je také ortogonální!

Důsledek: Pro každou symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje ortogonální matice P a diagonální T tj. $A = P \cdot T \cdot P^{-1}$.

Poznámka: Celá věta je o reálných číslech (maticích), ale důkaz pracuje s komplexními (v první části.)

JORDANOVA NORMÁLNÍ FORMA

Už víme: ne každá matice je diagonalizovatelná, např. $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

(kdyby byla, tak $\exists R$ $\quad RIR^{-1} \underset{\uparrow \text{neplatí}}{=} \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ - spor) $\quad \underset{\text{pouze } \lambda=1}{\uparrow}$

ZAJÍMÁ NÁS: jak moc blízko k diagonální matici je možné se dostat.

Def: Jordanův blok (buňka) $J_k(\lambda)$ řádu k je matice

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

(tj. na diagonále λ, těsně nad ní samé 1)

vlastní číslo $J_k(\lambda)$ je jediné, totiž λ.

Def: Matice J je v Jordanově normálním tvaru, má-li podobu

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & & \\ & & \boxed{J_3} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \boxed{J_m} \end{pmatrix}$$

kde každé $J_i = J_{k_i}(\lambda_i)$ je Jordanův blok.

Čísla λ_i nemusí být navzájem různá.

Věta (o Jordanově normální formě):

Každá čtvercová komplexní matice je podobná matici v Jordanově norm. tvaru. Až na pořadí bloků je tvar jednoznačně určen.

bez důkazu.

VLASTNÍ ČÍSLA A GRAFY

Víme: Cayley-Hamilton: pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí $p_A(A) = 0$. (*)

Def: minimální polynom matice A je normovaný polynom $m_A(t)$ nejmenšího stupně tž. $m_A(A) = 0$. Př. pro $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$p_A(t) = (2-t)^2$, $m_A(t) = 2-t$

☺ $m_A(t)$ dělí $p_A(t)$.

Dk: Víme (viz minulá přednáška), že existují polynomy $s(t)$ a $z(t)$ tž. $p_A(t) = m_A(t)\cdot s(t) + z(t)$, a stupeň $z(t)$ je menší než $m_A(t)$.

$$(*) \Rightarrow 0 = \underbrace{\overbrace{m_A(A)}^{=0}.s(A)}_{=0} + z(A) \Rightarrow z(t) = 0 \quad ▨$$

Platí:
- každý kořen polynomu $m_A(t)$ je kořenem $p_A(t)$.
- $m_A(t)$ nemá násobné kořeny. (zkuste si dokázat) ⌂

Df: diametr grafu $G=(V,E)$ je $\max_{u,v\in V} d(u,v)$, kde $d(u,v)$ je délka (v počtu hran) mezi vrcholy u a v

Def: matice sousednosti grafu $G=(V,E)$: $A \in \{0,1\}^{n\times n}$, $n=|V|$, kde $A_{ij} = 1 \iff \{i,j\} \in E$

Platí: $A^k_{ij} = 1 \iff$ existuje sled délky k mezi i a j

procházka, vše se smí opakovat

Věta: Počet různých vlastních čísel matice sousednosti grafu G je alespoň diametr(G) + 1.

Důkaz: ozn. A matici sousednosti $G=(V,E)$, d = diametr(G).

Jistě existují vrcholy $i,j \in V$ tž. $d(i,j) = d$.

← délka nejkratší cesty mezi i a j

Tedy $A^d_{ij} \geq 1$ a $A^k_{ij} = 0$ pro $k = 1, 2, \dots, d-1$.

$\Rightarrow A^d$ není lineární kombinací $I, A, A^2, \dots, A^{d-1}$

Platí: $\forall k > \ell$, A^k je LK $I, A, A^2, \dots, A^\ell$, kde ℓ je stupeň $m_A(t)$.

dk. - viz důsledek Cayley-Hamiltona.

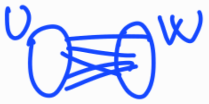
$\Rightarrow$ stupeň $m_A(t)$ musí být aspoň $d+1$

$\Rightarrow$ podle ⌂ $p_A(t)$ má $\geq d+1$ různých kořenů - vl. čísel. ▨

Věta (charakterizace bipartitních grafů pomocí vl. čísel)

Nechť $G=(V,E)$ je neorientovaný graf a $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ jeho vlastní čísla. Pak G je bipartitní, právě když

$$\forall i = 1,\dots,n : \lambda_i = -\lambda_{n-i+1}.$$



Důkaz: $\Rightarrow$ nechť U a W jsou dvě partity grafu G.

Matice sousednosti G má podobu

$$A = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline B^T & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} U \\ W \end{array} \\ \begin{array}{cc} U & W \end{array} & \end{array}$$

Uvažme vl. vektor $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ příslušný vl. číslu λ: $Av = \lambda v$, tedy

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline B^T & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} By \\ B^T x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda y = B^T x \\ \lambda x = By \end{array}$$

Všimněme si

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline B^T & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -By \\ B^T x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \underbrace{-\lambda \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}},$$

tedy $-\lambda$ je také vl. číslo matice A.

__Navíc__: je-li k geometrická násobnost vl. čísla λ, pak popsaný způsob ukazuje, že geom. násobnost $-\lambda$ je také k.

$\Leftarrow$ Vezměme liché celé kladné číslo k. Buď A matice sous.

Všimněme si
- λ_i^k je vl. číslo matice A^k (jistě $A^k v = \lambda^k v$, pokud $Av = \lambda v$)
- $\sum_{i=1}^n \lambda_i^k = 0$ (díky symetrii λ_i)

Víme: součet vl. čísel je součet prvků na diagonále

$$\Rightarrow \forall i : A^k_{ii} = 0$$

Když G má lichý cyklus C délky k, pak $\forall i \in C$, $A^k_{ii} > 0$

ALE $A^k_{ii} = 0$ $\Rightarrow$ G nemá lichý cyklus, tj. G je bipartitní. ∎
(pro každé i a liché k)