POLYNOMY – doplnění/připomenutí LA 2, $\boxed{18/3/2024}$

polynom stupně n v **proměnné x** nad tělesem T je výraz $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$,

kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in T$, $a_n \neq 0$.

Platí: Nechť p a q jsou polynomy. Pak existuje právě jeden polynom r a jeden polynom z splňující: i) $p = q \cdot r + z$

zbytek

ii) stupeň polynomu z je menší než stupeň q

Říkáme: **p je dělitelný polynomem q**, pokud zbytek po dělení polynomu p polynomem q je nulový polynom.

Též říkáme: **q dělí p**.

Kořen polynomu p je $r \in T$ splňující $p(r) = 0$.

Platí: r je kořen polynomu $p(x) \iff (x-r)$ dělí $p(x)$.

násobnost kořene r polynomu p je největší kladné celé číslo k takové, že $(x-r)^k$ dělí polynom p.

Tvrzení: Každá matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je podobná nějaké horní trojúhelníkové matici.

Věta (Cayley-Hamilton). Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a

$p_A(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0$ jejíž charakteristický polynom.

Pak $p_A(A) = b_n A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \dots + b_1 A + b_0 I = 0$. (nulová matice)

Důkaz: Nechť C je matice t.ž.

díky Tvrzení víme, že C, D existují.

(*) $D = C \cdot A \cdot C^{-1}$ je horní trojúhelníková.

$\Rightarrow$ vlastní čísla A jsou diagonální prvky D - označme $d_1, d_2, \dots, d_n$.

Víme: podobné matice mají stejný char. pol.

Pak $p_A(t) = (d_1 - t)(d_2 - t)\cdots(d_n - t)$.

$$p_A(A) = (d_1 I - A)(d_2 I - A)\cdots(d_n I - A) =$$

dosadíme za A podle (*)

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(d_i C^{-1} I C - C^{-1} D C\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(C^{-1}(d_i I - D)C\right) = C^{-1} \prod_{i=1}^{n} \underbrace{(d_i I - D)}_{\text{horní trojúhel., na pozici } i,i \text{ je } 0} C = 0 \quad \blacksquare$$

$= 0$

1. sloupec 0

1.-2. sloupec 0

⋮

všechny sloupce 0

Důsledek: Pro každé $k \geq n$, $A^k \in \operatorname{span}\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$

Dk: Uvaž polynom t^k a jeho dělení polynomem $p_A(t)$.

$$t^k = \underbrace{r(t)}_{\substack{\text{polynom stupně}\\ k-n}} \cdot \overbrace{p_A(t)}^{\text{stupeň } n} + \underbrace{s(t)}_{\text{polynom stupně } < n}$$

$$\Rightarrow A^k = r(A) \cdot \underbrace{p_A(A)}_{\substack{=0 \text{ dle Cayly-Hamilton. věty}}} + s(A) = s(A).$$

$\blacksquare$

Pozn: Je myslitelné, že dimenze

$\operatorname{span}\{I, A, A^2, \dots, A^n, \dots, A^{n^2}\}$ bude $\sim n^2$

– je pouze $\leq n+1$.

Def: Algebraická násobnost vl. čísla λ matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je rovna násobnosti kořene λ polynomu $p_A(x)$.

Geometrická násobnost vl. čísla λ je $\dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda I))$

tj. počet lin. nezávislých vl. vektorů k vl. číslu λ.

Příklad: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2$

... jediný kořen násobnosti 2

$\Rightarrow$ jediné vl. číslo matice A je $\lambda = 1$

algebraické násobnosti 2

vlastní vektory? $(A - \lambda I)x = 0$ $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow x_2 = 0$, vl. vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \dim(\operatorname{Ker}) = 1$

$\Rightarrow$ geometrická násobnost vl. č. 1 je 1

Tvrzení: Pro matici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ platí

i) $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$.

ii) $\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.

Důkaz: plyne ze základní věty algebry pro $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$; neplatí pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

i) $p_A(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_n)$

$\det(A) = p_A(0) = (-1)^n(-\lambda_1)(-\lambda_2)\dots(-\lambda_n) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$.

víme z minulé přednášky

ii) Uvaž horní trojúhelníkovou matici D podobnou A a char. polynomy p_A a p_D.

Víme, že

a) D má na diagonále vl. čísla matice A

b) $p_A = p_D$

c) koeficient u x^{n-1} je $(-1)^{n-1} \cdot$ "součet na diagonále"

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \overset{b+c)}{=} \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} \overset{a)}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

■

Věta: Matice $A \in T^{n \times n}$ je diagonalizovatelná, právě tehdy když i) součet algebraických násobností vl. čísel je n,

a ii) geometrická násobnost každého vl. čísla je rovna jeho algebraické násobnosti.

Pozn: Pro $T = \mathbb{C}$ dostáváme:

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je diagonalizovatelná $\iff$ ke každému vl. č. λ_i existuje r_i LN vektorů, kde r_i je algebr. násobnost λ_i.

Důkaz: $\Rightarrow$ dle předp. existuje regulární R a diag. D tž. $D = R^{-1} \cdot A \cdot R$, tj. $A \cdot R = R \cdot D$

tj. $\forall i$, i-tý sloupec R je vlastní vektor k vl. č. D_{ii}.

- každé vlastní číslo je na diagonále tolikrát, kolik je jeho algebraická násobnost
- ke každému výskytu vl. č. na diagonále máme jiný vl. vektor
- protože R je regulární, jsou vektory ke stejnému vl. číslu lineárně nezávislé.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že A má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$; označme $r_1, \dots, r_k$ jejich algebraické násobnosti.

Označme $b_i^1, \dots, b_i^{r_i}$ LN vlastní vektory k vl. č. λ_i.

Chceme nahlédnout, že $b_1^1, \dots, b_1^{r_1}, \dots, b_k^1, \dots, b_k^{r_k}$ jsou lineárně nezávislé - pak máme bázi, protože $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$.

(víme: A diagonalizovatelná $\iff \exists$ báze z vlastních vekt.)

<u>sporem</u>: kdyby byl LZ, existují koeficienty α_i^j, ne všechny nulové, tž.

$$\sum_{i=1}^{k} \underbrace{\left(\alpha_i^1 \cdot b_i^1 + \dots + \alpha_i^{r_i} \cdot b_i^{r_i} \right)}_{\text{ozn. } w_i} = 0 \qquad (*)$$

<u>všimneme si</u>:

- pokud $w_i = 0$, tak $\alpha_i^1 = \alpha_i^2 = \dots = \alpha_i^{r_i} = 0$,
  protože $b_i^1, b_i^2, \dots, b_i^{r_i}$ jsou LN (předpoklad věty)

  $\Rightarrow$ musí existovat i tž. $w_i \neq 0$
- pokud $w_i \neq 0$, tak w_i je vlastní vektor k vlastnímu číslu λ_i (už dříve jsme viděli)
- uvažme všechny nenulové w_i -
  - označme $w_{j_1}, \dots, w_{j_\ell}$

  patří k různým vl. číslům (dříve jsme dokázali)

  $\Rightarrow$ jsou LN

  & $\displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} w_{j_i} = 0$ (díky $(*)$)

  $\Bigg\}$ spor.