VLASTNÍ ČÍSLA a VL. VEKTORY LA 2 11/3/2024

Připomeňme: λ je vl. číslo matice A pokud existuje $u \neq 0$ t.ž. $Au = \lambda u$.
u … vl. vektor

charakteristický mnohočlen A: $p_A(t) = \det(A - tI)$

Už víme: • λ je vl. č. $A \iff \lambda$ je kořen $p_A(t)$

(*) • jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ navzájem různá, pak jim odpovídající vl. vektory jsou lin. nezávislé

Matice $A, A' \in T^{n \times n}$ jsou podobné, pokud $\exists\, R \in T^{n \times n}$ regulární t.ž. $A' = R \cdot A \cdot R^{-1}$

Matice A je diagonalizovatelná, je-li podobná nějaké diagonální matici.

Také víme (bylo v řeči lineárních zobrazení):

☺ Matice $A \in T^{n \times n}$ je diagonalizovatelná $\iff$ existuje báze B VP T^n složená z vl. v. matice A.

Dk: $\Rightarrow$ existuje diagonální D a regulární R t.ž. $D = R \cdot A \cdot R^{-1} \Rightarrow R^{-1} \cdot D = A R^{-1}$

Označíme-li b_i = i-tý sloupec R^{-1}: $D_{ii} b_i = A \cdot b_i$

tudíž: každé b_i je vl. v. matice A, a dohromady tvoří bázi T^n

$\Leftarrow$ Nechť R je matice, jejíž sloupce jsou vektory báze B. Pak $A \cdot B = D \cdot B = B \cdot D$. Protože B je regulární, $\exists B^{-1}$
(D diagonální)
$\Rightarrow A = B \cdot D \cdot B^{-1}$ ∎

Uvědomme si: A je diagonalizovatelná – matice $f(x) = Ax$ je diagonální, pro vhodnou bázi B.

Důsledek (*): Matice $A \in T^{n\times n}$ má nejvýše n různých vlastních čísel.

Důsledek (*) a ☺: Má-li matice $A \in T^{n\times n}$ n různých vl. čísel, pak je diagonalizovatelná.

Pozor! Neplatí naopak (např. I ...)

Věta: Jsou-li A a B podobné matice, pak $p_A(t) = p_B(t)$.

Důkaz: víme: $\exists R$ tž. $B = R\cdot A\cdot R^{-1}$

$$p_B(t) = \det(B - tI) = \det(R\cdot A\cdot R^{-1} - t\cdot R\cdot I\cdot R^{-1})$$
$$= \det(R\cdot(A - t\cdot I)R^{-1}) = \det(R)\det(A - tI)\cdot\det(R^{-1})$$
$$= \det(A - tI) = p_A(t). \qquad \blacksquare$$

Pozor! Neplatí naopak: např. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Jistě $p_A(t) = p_B(t)$.

Kdyby byly podobné, $\exists R$: $A = \underbrace{R\cdot B\cdot R^{-1}}_{=I}$ – spor.

asi vynechat

Díky větě má smysl následující definice:

Def: Nechť $f: V \to V$ je lin. zobrazení.

Charakteristický polynom f $p_f(t)$ je charakt. polynom matice lin. zobr. vůči libovolné bázi.

Minule jsme si všimnuli, že pro každé dvě báze B, B', matice ${}_B[f]_B$ a ${}_{B'}[f]_{B'}$ jsou podobné $\Rightarrow$ díky větě nezáleží na volbě báze – vždy dostaneme stejný polynom.

KRÁLÍCI? viz str. 4/6

Důležité koeficienty charakt. mnohočlenu

Označme $p_A(t) = b_n \cdot t^n + b_{n-1} \cdot t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0$

- $b_n = (-1)^n$ … ze součinu prvků diagonály $A - tI$
- $b_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$$\begin{pmatrix} a_{11}-t & & & \\ & a_{22}-t & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}-t \end{pmatrix}$$

jediná možnost, jak získat t^n je z příspěvku $\prod_{i=1}^{n} (a_{ii}-t)$
u $n-1$ členů vybrat $(-t)$, a u jednoho a_{ii}.
Sečtením všech těchto součinů dostaneme b_{n-1}.

- $b_0 = \det(A)$ …. dosaď $t=0$ do $A - tI$, do $p_A(t)$

Věta: Matice A je singulární právě když 0 je její vlastní číslo.

Důkaz: víme • A singulární $\iff \det(A) = 0$
$\iff \det(A - 0 \cdot I) = 0 \iff 0$ je vl. č. A. ∎

Tj. poznáme podle koeficientu b_0, je-li A singulární.

Základní věta algebry (bez důkazu):
Každý polynom s komplexními koeficienty má alespoň jeden komplexní kořen.

Důsledek: každý polynom v $\mathbb{C}$ lze zapsat jako
$p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$, kde $x_1, \dots, x_n$ jsou komplexní kořeny.

Pozn. v $\mathbb{R}$ to nejde vždy: $p(x) = x^2 + 1$

Tvrzení: každá matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je podobná nějaké horní trojúhelníkové matici.

Důkaz: indukcí podle velikosti: pro $A \dots 1\times 1$, platí

indukční krok: uvaž matici A $n\times n$. (*) základní věta algebry

Víme (*), že má nějaké vl. číslo $\lambda \in \mathbb{C}$, označme v odpovídající vl. vektor.... $Av = \lambda v$

Doplníme vektor v na bázi $\mathbb{C}^n$: $\underbrace{v_1 = v, v_2, \dots, v_n}_{B}$, a nechť $C = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$.

Protože B je báze, existuje $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tž.

$$A\cdot C = C\cdot D, \text{ kde } D = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & z \\ \hline 0 & \bar D \end{array}\right]$$

tj. $A = C\cdot D\cdot C^{-1}$

Podle indukčního předpokladu existuje matice $\bar C$, $(n-1)\times(n-1)$ tž. $\underbrace{\bar C^{-1}\cdot \bar D\cdot \bar C}_{\text{označme } \bar{\bar T}}$ je horní trojúhelníková .... pak $\bar D = \bar C\cdot \bar{\bar T}\cdot \bar C^{-1}$

Proto:

$$D = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & z \\ \hline 0 & \bar D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \bar C \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \lambda & z\bar C \\ \hline 0 & \bar{\bar T} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \bar C^{-1} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A = C\cdot \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \bar C \end{array}\right]}_{=R}\left[\begin{array}{c|c} \lambda & z\bar C \\ \hline 0 & \bar{\bar T} \end{array}\right]\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \bar C^{-1} \end{array}\right]}_{=R^{-1}}\cdot C^{-1}$$

∎

Věta (Cayley-Hamilton). Buď $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ a

$p_A(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0$ její charakteristický polynom.

nulová matice

Pak $p_A(A) = b_n A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \dots + b_1 A + b_0 \cdot I = 0$.

Důkaz: Nechť C je matice t.ž.

ještě nebyl

$D = C \cdot A \cdot C^{-1}$ je horní trojúhelníková.

A,D – podobné

$\Rightarrow$ vlastní čísla A jsou diagonální prvky D – označme $d_1, d_2, \dots, d_n$.

podobné mají stejný char. pol.

Pak $p_A(t) = (d_1 - t)(d_2 - t) \cdots (d_n - t)$.

$$p_A(A) = (d_1 I - A)(d_2 I - A) \cdots (d_n I - A) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(d_i C^{-1} \cdot I \cdot C - C^{-1} \cdot D \cdot C \right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(C^{-1} (d_i I - D) C \right) = C^{-1} \prod_{i=1}^{n} \underbrace{(d_i I - D)}_{\text{horní trojúhel., na pozici } i,i \text{ je } 0} C$$

$$= 0$$

∎

$= 0$

1. sloupec 0

1.–2. sloupec 0

⋮

všechny sloupce 0

Důsledek: Pro každé $k \geq n$, $A^k \in \mathrm{span}\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$.

Uvaž polynom t^k a jeho dělení polynomem $p_A(t)$.

$$t^k = \underbrace{r(t)}_{\text{polynom stupně } k-n} \cdot p_A(t) + \underbrace{s(t)}_{\text{polynom stupně } < n}$$

$$\Rightarrow A^k = r(A) \cdot \underbrace{p_A(A)}_{=0 \text{ dle Cayley-Hamilton. věty}} + s(A) = s(A). \qquad \blacksquare$$

Pozn: Je myslitelné, že dimenze

$\mathrm{span}\{I, A, A^2, \dots, A^n, \dots, A^{n^2}\}$ bude $\sim n^2$

– je pouze $\leq n+1$.

KRÁLÍCI – ilustrace — **Fibonacciho čísla**

rok	0	1	2	3	4	…	k
počet	0	1	1	2	3		$F_{k-1}+F_{k-2}$
	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4		F_k

$$\begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{ozn. } M} \begin{pmatrix} F_{k-1} \\ F_{k-2} \end{pmatrix} = M^{k-1} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla M: $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nechť $C = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix}$. Pak $C^{-1} \cdot M \cdot C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$,

a $M^k = \left(C \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} C^{-1}\right)^k = C \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^k \cdot C^{-1} = C \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \cdot C^{-1}$